جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش و پرورش

جبر

سال اول

آموزش متوسطهٔ عمومی

علوم تجربی و ریاضی

N = ۱، ۲، ۳، ۴، ...

بسم الله الرحمن الرحیم

جبر

سال اول

آموزش متوسطهٔ عمومی

علوم تجربی و ریاضی

موءلف ابوالقاسم قربانی

بنابر پیشنهاد دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی، این کتاب در سال تحصیلی ۶۲ ـ ۶۰ در گروه تحقیق ریاضی دانشگاه شیراز و با همکاری دبیران آموزش‌وپرورش شیراز مورد بررسی و تصحیح قرار گرفته است .

۱۳۶۲

صفحه پرداز ◄ پروین صدر
رسام ◄ خسرو مدیریان
چاپ از ◄ چاپ و نشر

فهرست

فصل ۱

خواص اعمال در مجموعهٔ اعداد حقیقی

۱ـ همان‌طورکه می‌دانید معمولا مجموعهٔ اعداد حقیقی و زیر مجموعه‌های مهم‌آن را با حرف خاصی از حروف بزرگ الفبای لاتینی به صورتهای زیر نمایش می‌دهند:

مجموعهٔ عددهای طبیعی N
$$N = \{ ۱,۲,۳,\cdots \}$$

مجموعهٔ عددهای درست Z
$$Z = \{ \cdots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \cdots \}$$

مجموعهٔ عددهای گویا Q
$$Q = \left\{ \cdots, -\frac{۳}{۲}, \cdots, -۱, \cdots, ۰, \cdots, \frac{۱}{۲}, \cdots, \frac{۲}{۳}, \cdots, ۱, \cdots \right\}$$

مجموعهٔ عددهای حقیقی R .

I ـ جمع وتفریق

الف ـ بسته بودن مجموعهٔ R نسبت به عمل جمع

$$\forall a,b \in R : \quad a+b \in R \qquad (A_۱)^{۱}$$

ب ـ خاصیت جابجایی عمل جمع

$$\forall a,b \in R : \quad a+b=b+a \qquad (A_۲)$$

ج ـ شرکت‌پذیری عمل جمع

$$\forall a,b,c \in R : \quad (a+b)+c=a+(b+c) \qquad (A_۳)$$

---

۱ ـ حرف A از کلمهٔ انگلیسی یا فرانسوی Addition (= جمع) اقتباس شده .

د ـ **عضو خنثای عمل جمع ـ یك و فقط یك‌عدد حقیقی وجود داردکه برای عمل جمع خنثی است .**

یعنی افزودن‌آن به هرعدد حقیقی تغییری درآن عددحقیقی‌نمی‌دهد. این‌عدد را صفرمی‌نامیم وآن را با نماد ۰ نشان می‌دهیم.

$$(A_4) \qquad \boxed{\forall a \in R: \quad a+0=0+a=a}$$

ه ـ **وجود عدد قرینه (نسبت به عمل جمع) ـ نظیر هر عدد حقیقی a یك و فقط یك عدد حقیقی وجود دارد که مجموع آن با a مساوی است با صفر** (عضو خنثای عمل جمع).

این عدد را قرینهٔ عدد a می‌نامیم و آن را با نماد $-a$ نشان می‌دهیم.

$$(A_5) \qquad \boxed{\forall a \in R: \quad a+(-a)=(-a)+(a)=0}$$

II ـ خواص عمل جمع اعداد حقیقی

اکنون با در دست داشتن پنج خاصیت مربوط به‌عمل جمع می‌توانیم خواص بیشتر این عمل‌را بررسی وعمل تفریق اعداد حقیقی‌را از روی‌آن تعریف کنیم .

الف ـ **قرینهٔ قرینهٔ هر عدد حقیقی مساوی است با خود آن عدد.**

$$\boxed{\forall a \in R: \quad -(-a)=a}$$

زیرا $-a+(-(-a))=-(-(-a))+(-a)=0$ $\quad -(-a)$ قرینهٔ $(-a)$ است

$-a+a=a+(-a)=0$ $\quad$ a قرینهٔ $(-a)$ است

با توجه به اینکه قرینهٔ هر عدد منحصر به فرد است $-(-a)=a$ خواهد شد.

ب ـ **قرینهٔ مجموع دو عدد حقیقی مساوی است با مجموع قرینه‌های آنها.**

$$\boxed{\forall a,b \in R: \quad -(a+b)=(-a)+(-b)}$$

زیرا:

$$(a+b)+[(-a)+(-b)]=a+b+(-a)+(-b)=[a+(-a)]+[b+(-b)]=0+0=0$$

و در نتیجه بنا به تعریف $(-a)+(-b)$ قرینهٔ $a+b$ است.

تبصره ـ خاصیت «ب» را تعمیم داده به‌صورت زیر می‌نویسند:

$$-(a+b+c+\dots)=(-a)+(-b)+(-c)+\dots$$

تعریف تفاضل دوعدد حقیقی و عمل تفریق ـ مجموع عدد a و قرینهٔ‌عدد b یعنی $(-b)$ را تفاضل a و b (به همین ترتیب) می‌نامند و آن را با علامت $a-b$ نشان می‌دهند.

$$\forall a,b\in R: \quad a-b=a+(-b)$$

وقتی می‌گوییم تفاضل a و b (به‌همین ترتیب)مقصود $a-b$ است.

محاسبهٔ تفاضل $a-b$ را عمل تفریق می‌نامند.

III ـ ضرب و تقسیم

الف ـ بسته بودن مجموعهٔ R نسبت به عمل‌ضرب

$$(M_1)[1] \qquad \forall a,b\in R: \quad a\times b\in R$$

ب ـ خاصیت جابجایی عمل ضرب

$$(M_2) \qquad \forall a,b\in R: \quad a\times b=b\times a$$

ج ـ شرکت‌پذیری عمل ضرب

$$(M_3) \qquad \forall a,b,c\in R: \quad (a\times b)\times c=a\times(b\times c)$$

۱ـ حرف M از کلمهٔ انگلیسی‌یافرانسوی Multiplication (=ضرب) اقتباس شده است.

د ـ **عضو خنثای عمل ضرب ـ یك وفقط یك‌عدد حقیقی مخالف با صفروجود دارد که برای عمل ضرب اعداد حقیقی خنثی است**. بدین معنی که ضرب کردن هر عدد در آن تغییری در آن عدد نمی‌دهد.

این عدد را یك می‌نامیم و آن را با نماد ۱ نشان می‌دهیم.

$$(M_4) \qquad \boxed{\forall a \in R: \quad a \times 1 = 1 \times a = a}$$

ه ـ وجود وارون عدد حقیقی ـ نظیر هرعدد حقیقی a که مخالف با صفر باشد یك و فقط یك عدد حقیقی وجود دارد که حاصل ضرب آن در a مساوی است با عدد یك

(عضوخنثای عمل‌ضرب). این‌عدد را وارون عدد a می‌نامیم و آن را با نماد $\frac{1}{a}$ نشان می‌دهیم.

$$(M_5) \qquad \boxed{\forall a \in R, a \neq 0: \quad a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1}$$

و ـ توزیع پذیری عمل ضرب نسبت به عمل جمع

$$(D)[1] \qquad \boxed{\forall a,b,c \in R: \begin{cases} a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c) & \text{توزیع‌پذیری ازچپ:} \\ (b+c) \times a = (b \times a) + (c \times a) & \text{توزیع‌پذیری ازراست:} \end{cases}}$$

IV ـ خواص عمل ضرب اعداد حقیقی

الف ـ حاصل ضرب هر عدد حقیقی در صفر مساوی است با صفر.

$$\boxed{\forall a \in R \qquad a \times 0 = 0 \times a = 0}$$

به بیان دیگر :

اگریکی از دو عامل ضرب صفر باشد حاصل‌ضرب صفر است.

---

۱ ـ حرف D از کلمهٔ انگلیسی **Distributivity** (= توزیع پذیری) گرفته شده است.

$$a,b\in R \text{ و } a=0 \text{ یا } b=0 \implies ab=0$$

ب- اگر حاصلضرب دوعدد صفر باشد لااقل یکی از آن دوعدد صفر است.
یعنی :

$$\forall a,b\in R,\quad ab=0 \implies a=0 \vee b=0$$

د- وارون وارون هر عدد حقیقی مساوی است با خود آن عدد.

$$\forall a\in R \text{ و } a\neq 0: \frac{1}{(\frac{1}{a})}=a$$

در خاصیت (M_4) پذیرفتیم که هر عدد حقیقی مخالف صفر یك و فقط یك وارون دارد و وارون a را با نماد $\frac{1}{a}$ نشان دادیم.

$$a\times\frac{1}{a}=1=\frac{1}{a}\times a$$

چون هرعدد حقیقی مخالف صفر فقط یك وارون دارد معلوم می‌شود که اگر حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی مساوی با ۱ باشد آن دوعدد وارون یکدیگرند. پس وارون عدد $\frac{1}{a}$ همان عدد a است.

نتیجه ۱ - حاصل‌ضرب وارونهای دوعدد مخالف با صفر مساوی است با وارون حاصل ضرب آنها.

$$\forall a,b\in R \text{ و } a\neq 0 \text{ و } b\neq 0:\quad \frac{1}{a}\times\frac{1}{b}=\frac{1}{ab}$$

باید ثابت کنیم که $\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}$ وارون ab است یعنی باید ثابت کنیم که :

$$ab(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b})=1$$

بنا به خاصیت ب و ج از قسمت III داریم:

$$ab(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b})=(a\cdot\frac{1}{a})(b\cdot\frac{1}{b})$$
$$=1\times 1$$
$$=1$$

قضیه ـ اگر a و b عددهای حقیقی دلخواه باشند:

$$\begin{cases} a(-b)=-ab & (۱) \\ (-a)(b)=-ab & (۲) \\ (-a)(-b)=ab & (۳) \end{cases}$$

اولا، ثانیاً، ثالثاً به ترتیب.

یعنی: اولا حاصل‌ضرب عدد a در قرینهٔ عدد b مساوی است با قرینه حاصل‌ضرب ab

(قسمتهای ثانیاً و ثالثاً را به فارسی بیان کنید.)

برهانـ اولا: اگر عبارت $a[b+(-b)]$ را به دو طریق زیر حساب کنیم معلوم می‌شود که:

$$a[b+(-b)]=a\times ۰=۰ \qquad \text{(چرا؟)}$$

$$a[b+(-b)]=ab+a(-b) \qquad \text{(چرا؟)}$$

از دوتساوی فوق معلوم می‌شود که $ab+a(-b)=۰$

یعنی ab و $a(-b)$ قرینهٔ یکدیگرند پس:

$$\boxed{a(-b)=-ab} \qquad (۱)$$

ثانیاً: اگر در تساوی فوق جای a و b را باهم عوض کنیم معلوم می‌شود:

$$b(-a)=-ba$$

و یا

$$\boxed{(-a)\,b=-ab} \qquad (۲)$$

ثالثاً: با استفاده از قسمت ثانیاً می‌توان نوشت:

$$(-a)(-b)=-[a(-b)]$$

$$=-[-ab] \qquad \text{بنا به قسمت اول:}$$

$$=ab \qquad \text{بنا به خاصیت «الف» از قسمت II}$$

پس:

$$\boxed{(-a)(-b)=ab} \qquad (۳)$$

نتیجهٔ ۱ ـ حاصل‌ضرب هر عدد در ۱- مساوی است با قرینهٔ آن عدد.

$$(-۱)a=-a$$

نتیجهٔ ۲ ـ عمل ضرب نسبت به عمل تفریق توزیع‌پذیر است. (c عدد حقیقی است)

یعنی:

$$a(b-c)=ab-ac$$

زیرا:

$$a(b-c)=a[b+(-c)] \qquad \text{(چرا؟)}$$
$$=ab+a(-c) \qquad \text{(چرا؟)}$$
$$=ab-ac \qquad \text{(چرا؟)}$$

نتیجهٔ۳ـ وارون عددمخالف‌صفر $-a$ عدد $-\frac{1}{a}$ است.

یعنی:

$$\frac{1}{-a}=-\frac{1}{a} \qquad a\neq 0$$

برای آن‌که ثابت کنیم‌که وارون عدد $-a$ عدد $-\frac{1}{a}$ است‌کافی است ثابت کنیم که حاصل‌ضرب آنها مساوی با ۱ است:

بنا به‌قسمت ثالثاً از قضیهٔ صفحهٔ قبل

$$(-a)(-\frac{1}{a})=a\times\frac{1}{a}$$
$$=1$$

تعریف خارج قسمت دو عدد حقیقی وعمل تقسیم ـ اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $b\neq 0$ حاصل ضرب‌عدد a را در وارون عدد b (یعنی در $\frac{1}{b}$)خارج قسمت a به b می‌نامند و آن را با نماد $\frac{a}{b}$ نشان می‌دهند.

$$\forall a,b\in R, b\neq 0:\ \frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$$

تمرین

۱ـ آیا مجموعهٔ $\{1,2,3,4,5\}$ نسبت به عمل جمع بسته است؟

۲ـ آیا مجموعهٔ اعداد فرد نسبت به عمل جمع بسته است؟ نسبت به عمل ضرب چطور؟

۳ـ آیا مجموعهٔ اعداد زوج نسبت به عمل جمع بسته است؟ نسبت به عمل ضرب چطور؟

۴ـ $a+b+c$ را به چندترتیب مختلف می‌توان نوشت؟ آنها را بنویسید.

۵ـ قرینهٔ هر یك از اعداد زیر را معین کنید.

$$4 \ ,\ -2 \ ,\ \frac{2}{3} \ ,\ -\frac{5}{2} \ ,\ -0/25$$

۶ـ هر یك از عبارات زیر را به دو طریق حساب کنید و خاصیتی را که بکار می‌برید نام ببرید.

$$-(۲+۳) \quad , \quad -[(-۲)+۳] \quad , \quad -[۴+(-۸)]$$

$$-[۷+(-۳)-(-۲)] \quad , \quad -[(-۲)+(-۳)+۴]$$

۷ـ هر یك ازعبارات زیررا حساب کنید.

$$۵-(۳-۸)-۴ \quad ; \quad -۶-[(-۳)-۵+۲]$$

$$-۶-(-۳-۸-۱۰)$$

۸ـ abc را به چندترتیب مختلف می‌توان نوشت؟ آنها را بنویسید.

۹ـ وارون ضربی هر یك از اعداد زیر را بنویسید.

$$۳ \quad , \quad -۴ \quad , \quad -۱ \quad , \quad \frac{۱}{۲} \quad , \quad \frac{۱}{\frac{۱}{۵}}$$

۱۰ـ اگر a و b و c اعدادی حقیقی باشند و داشته باشیم:

$$(a-b)(b-c)=۰$$

دربارهٔ a و b و c چه می‌توان گفت؟

۱۱ـ به ازاء چه مقادیری از x تساوی‌های زیر درست است:

$$(x-۵)\left(x-\frac{۱}{۲}\right)=۰$$

$$(x+۷)\left(x-\frac{۱}{۳}\right)=۰$$

۱۲ـ حاصلضربهای زیر را حساب کنید.

$$(-۲)(-۷) \quad ; \quad (-۵)(۴) \quad ; \quad \left(\frac{۱}{۲}\right)\left(-\frac{۵}{۶}\right)\left(-\frac{۴}{۵}\right)$$

$$(-۲)\left(-\frac{۱}{۲}\right)(۵) \quad ; \quad (-۱)\left(-\frac{۱}{۸}\right) \quad ; \quad (-۱)(-۲)(-۳)$$

۱۳ـ ثابت کنید $a\times ۰=۰$ و $a\in R$

۱۴ـ حاصلضربهای زیر را تعیین کنید.

$$(x+۲)(x-۳) \quad و \quad (a-۲)(a-۵)$$

۱۵ـ اگر $(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲=۰$ باشد دربارهٔ a و b و c چه میتوان گفت؟

۱۶ـ اگر $(a-b)(b-c)(c-a)=۰$ باشد دربارهٔ a و b و c چه میتوان گفت؟

فصل ۲

محاسبات جبری درمجموعهٔ R

الف- عبارات جبری

(تمام اعدادی که از این به بعد دراین کتاب درنظر می گیریم متعلق به مجموعهٔR هستند)

۱- عبارت جبری- درزیر چند عبارت جبری نوشته شده است.

$$4ax^2+bx+\sqrt{2} \quad \text{و} \quad (a+b)^3$$

$$\text{و} \quad \frac{2x-1}{3x-5} \quad \text{و} \quad x^2+3x-\sqrt{3}$$

$$\text{و} \quad \frac{2x^3-x-7}{x^2+x+1} \quad \text{و} \quad 2x+\sqrt{x-1}$$

$$2-\sqrt{3} \quad \text{و} \quad x$$

۲- عبارات جبری گویا و گنگ

مثال۱: عبارتهای $(a+b)^3$ و $x^2+3x-\sqrt{3}$ و $4ax^2+bx+\sqrt{2}$ و $3-\sqrt{5}$ و $-\frac{1}{3}$ و $\frac{2x-1}{3x-5}$ عبارتهای جبری گویا هستند.

مثال ۲ : عبارتهای $\sqrt{5xy}$ و $2x+\sqrt{x-1}$ و $\frac{3x+y}{x-2+\sqrt{x+y}}$ و $\frac{5x\sqrt{x-1}}{x+2}$ عبارتهای جبری گنگ هستند.

۳- محاسبه مقدارعددی یک عبارت جبری- مقدارعددی یک عبارت جبری بهازای مقادیر معینی از حروف که در آن عبارت وجود دارند به این طریق به دست می‌آید که به جای هر حرف مقدار آن را قرار داده اعمال لازم را انجام دهیم.

مثال ۱ : می‌خواهیم مقدار عددی عبارت $A=\frac{-5a^3+7b^2}{2a^2-b^2}$ را به ازای $a=2$ و $b=-3$ حساب کنیم.

به جای هرحرف مقدار آن را می گذاریم و اعمال لازم را انجام می‌دهیم:

$$A=\frac{-۵(۲)^{۳}+۷(-۳)^{۲}}{۲(۲)^{۲}-(-۳)^{۲}}=\frac{-۴۰+۶۳}{۸-۹}=\frac{۲۳}{-۱}=-۲۳$$

مثال ۲ : می‌خواهیم مقدارعددی عبارت زیر را به ازای $a=۲$ و $b=-۱$ و $c=۳$ و $d=۲$ حساب کنیم :

$$P=\frac{۲a^{۲}+b}{c+d}+ab(c+d)+\sqrt{۲a^{۳}-۲c+b}$$

مرتباً چنین می‌نویسیم:

$$۲a^{۲}+b=۲(۲)^{۲}-۱=۷$$

$$c+d=۳+۲=۵$$

پس :

$$\frac{۲a^{۲}+b}{c+d}=\frac{۷}{۵}$$

از طرف دیگر:

$$ab(c+d)=۲(-۱)\times ۵=-۱۰$$

و

$$\sqrt{۲a^{۳}-۲c+b}=\sqrt{۲(۲)^{۳}-۶-۱}=\sqrt{۹}=۳$$

بنابراین :

$$P=\frac{۷}{۵}-۱۰+۳=-\frac{۲۸}{۵}=-۵/۶$$

۴ـ تبصره ـ محاسبهٔ مقدار عددی‌عبارات جبری همیشه امکان پذیر است مگر آن که‌در محاسبه قسمتی از آن با یکی از دو مورد زیر مواجه شویم:

الف ـ تقسیم برصفر.

ب ـ محاسبهٔ ریشهٔ زوج از یك عدد منفی.

مثال ۱: محاسبه عبارت $\frac{۵x+۲}{x-۱}$، بغیر از $x=۱$، همیشه امکان‌پذیر است، یعنی به ازای هر مقدار از x می‌توان آن‌را حساب کرد ، اصطلاحاً گفته می‌شود که کسر $\frac{۵x+۲}{x-۱}$ بـه ازای $x=۱$ تعریف نشده است .

مثال ۲: محاسبه عبارت $۲x+\sqrt{x-۲}$ فقط وقتی امکان‌پذیر است که مقدار زیر رادیکال یعنی $x-۲$ مثبت یا صفر باشد . دراین‌جا نیز گفته می‌شود عبارت فوق به‌ازای $x\geqslant ۲$ تعریف شده و به‌ازای $x<۲$ تعریف نشده است .

۵ ـ قوانین محاسبه باعبارات جبری ـ چون می‌توان به‌جای حروفی که درعبارات جبری وجود دارند هرعدد حقیقی را قرارداد و مقادیر عددی آنها را حساب‌کرد (مگر در دو حالتی کـه در شمارهٔ ۴ همین فصل خاطرنشان کردیم) بنابراین قوانین محاسـبه همان قوانین محاسبه با اعداد حقیقی هستند. به عبارت دیگر اگر حروفی را که دریك عبارت جبری وجود

دارند نمایندهٔ اعداد حقیقی بدانیم هرعبارت جبری معین درحکم یك عدد حقیقی‌است ومی‌توان محاسباتی را که در بارهٔ اعداد حقیقی انجام می‌دهیم در بارهٔ عبارات جبری نیز انجام داد و احتیاجی نیست که دلیل هرعمل را در بارهٔ عبارات جبری تکرار کنیم.

تمرین

معین کنید که هر یك از عبارات زیر چه فرقی باهم دارند:

۱ $5a \ , \ a^5$ ۲ $3a^2 \ , \ (3a)^2$

۳ $4(a-b) \ , \ 4a-b$ ۴ $a-bc \ , \ (a-b)c$

۵ $4ab^3 \ , \ 4(ab)^3 \ , \ (4ab)^3$

۶ $a-b^2 \ , \ (a-b)^2$ ۷ $ab+c \ , \ a(b+c)$

۸ $a-b+c \ , \ a-(b+c)$ ۹ $\frac{a-b}{c} \ , \ a-\frac{b}{c}$

مقدار عددی هر یك از عبارات زیر را به ازای مقادیری کـه برای حروف معین شده است حساب کنید ؛

۱۰ $6a^3b^2-5a^2b^3+a^3b$ به ازای $a=5$ $b=-2$

۱۱ $5xy+2x^2y-3y^2-4x$ به ازای $x=3$ $y=0/2$

۱۲ $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)$ به ازای

$a=3 \ , \ b=0/2 \ , \ c=-0/2$

۱۳ ــ به ازای چه مقادیراز x عبارت $\frac{4}{x+3}$ تعریف نشده است ؟ مقدار عبارت فوق را به ازای $x=1$ ونیز به ازای $x=-2$ و $x=6$ حساب کنید .

۱۴ ــ به ازای چه مقادیری از x عبارت $\frac{2x^3-3}{x+2}-\frac{7x+1}{2x-1}$ تعریف نشده‌است؟ مقدار عبارت فوق را به ازای $x=-\frac{7}{2}$ حساب کنید.

ب ــ یك جمله‌ایها

۶ ــ یك‌جمله‌ای ــ یك‌جمله‌ای عبارتی است جبری که در آن اعمالی‌که باید در بارهٔ مقادیر حرفی انجام داد فقط ضرب یا به‌توان درست وغیرمنفی رساندن باشد .

مثال: هریك از عبارات جبری زیریك، یك‌جمله‌ای است:

$$(-x)(-a) \quad , \quad x(-y) \quad , \quad (-\tfrac{1}{2})x^2\times(-y)\times 3\times x$$

$$7 \times a \times x^{2} \times \sqrt{2} \times (-y^{2}) \times x^{3}$$

توجه کنید که بنا به تعریف فوق هرعدد حقیقی نسبت به هر حرف یا مجموعه‌ای باپایان از حروف یك یك‌جمله‌ای است. مثلا -3 نسبت به x یك‌یك جمله‌ایست ، زیرا میتوان نوشت $-3=-3x^{0}$ ، و همینطور نسبت به دو حرف u و v ، زیرا $-3=-3u^{0}v^{0}$

۷ ـ یك‌جمله‌ای ساده شده ـ اگرضربهایی‌که دربارهٔ اعداد و توانهای هرحرف در یك جمله‌ای معین شده است انجام دهیم یك‌جمله‌ای به صورت ساده شده در می‌آید.

مثال : یك جمله‌ایهای مثال شمارهٔ قبل را می‌توان بـه ترتیب به صورتهای سادهٔ زیر درآورد :

$$ax \quad , \quad -xy \quad , \quad \frac{3}{2}x^{3}y \quad , \quad -7\sqrt{2}ax^{5}y^{2}$$

۸ـ ضریب عددی یك‌جمله‌ای ـ دریك جمله‌ای ساده شده عامل‌عددی را (همراه با علامت آن) ضریب یك‌جمله‌ای می‌نامند.

مثال ۱ : ضریب یك‌جمله‌ای $-7\sqrt{2}ax^{5}y^{2}$ عبارت است از عدد $-7\sqrt{2}$.

در این یك‌جمله‌ای $ax^{5}y^{2}$ را قسمت حرفی می‌نامند.

مثال ۲ : ضریب یك‌جمله‌ای $\frac{3}{2}x^{3}y$ عبارت است از $\frac{3}{2}$ و قسمت حرفی آن عبارت است از $x^{3}y$.

مثال ۳ : ضرایب یـك‌جملـه‌ایهای $a^{3}x^{2}y^{2}$ و $-a^{2}b^{2}x^{7}$ بـه ترتیب عبارتند از : $+1$ و -1 .

ضریب‌نسبت به‌یك حرف‌یا عبارت: دریك جمله‌ای $a^{3}x^{2}y$ ، ضریب نسبت به‌حرف y ، $a^{3}x^{2}$ و نسبت به x^{2} ، $a^{3}y$ و نسبت به‌عبارت $x^{2}y$ برابر a^{3} می‌باشد .

۹ ـ درجهٔ یك‌جمله‌ای

اولا درجهٔ یك جمله‌ای نسبت به‌یکی‌از حروف‌آن عبارت‌است از نمای‌آن حرف در یك‌جمله‌ای ساده شده.

ثانیاً درجـهٔ یـك‌جمله‌ای نسبت به چند حرف آن عبارت است از مجموع نماهای آن حروف در یك‌جمله‌ای ساده شده .

گاهی اوقات درجه $\sqrt{x}$ را $\frac{1}{2}$ می‌گیریم .

چند مثال :

یک‌جمله‌ای ساده شده	ضریب یک‌جمله‌ای	قسمت حرفی	درجهٔ نسبت به x	درجهٔ نسبت به همهٔ حروف
ax	۱	ax	۱	۱+۱=۲
$-xy$	-۱	xy	۱	۱+۱=۲
$\frac{۳}{۲}x^۴y$	$\frac{۳}{۲}$	$x^۴y$	۴	۴+۱=۵
$-۷\sqrt{۲}ax^۵y^۲$	$-۷\sqrt{۲}$	$ax^۵y^۲$	۵	۱+۵+۲=۸

۱۰ــ تبصره ــ اگر حرفی در یک‌جمله‌ای وجود نداشته باشد می‌توان گفت‌که درجهٔ یک‌جمله‌ای نسبت به آن حرف صفر است.

مثال : درجه یک‌جمله ایهای $۲a^۲x^۴$ و ۲ − نسبت به حرف y صفر است.

۱۱ــ یک جمله ایهای متشابه ــ دو یا چند یک‌جمله‌ای را کــه قسمت حرفی آنها یکی باشد متشابه می‌نامند. دو یا چند یک‌جمله‌ای متشابــه اگر باهم تفاوتی داشته باشند آن تفاوت فقط در ضریب آنهاست.

مثال : یک‌جمله ایهای $-۲a^۳b^۲x$ ، $-\sqrt{۳}a^۳b^۲x$ ، $\frac{۵}{۷}a^۳b^۲x$ متشابه هستند.

۱۲ــ جمع جبری یک‌جمله‌ایهای متشابه ــ مجموع جبری یک جمله‌ایهای متشابه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A=۶a^۲x^۳y-\frac{۵}{۲}a^۲x^۳y+\frac{۳}{۴}a^۲x^۳y$$

می‌دانیم که عمل ضرب نسبت به عمل جمع توزیع‌پذیر است و می‌توان نوشت :

$$A=(۶-\frac{۵}{۲}+\frac{۳}{۴})a^۲x^۳y=\frac{۹}{۴}a^۲x^۳y$$

پس : مجموع جبری چند یک‌جمله‌ای متشابه مساوی است بایک، یک‌جمله‌ای‌که متشابه با آنها و ضریب آن مساوی با مجموع جبری ضرایب آنها باشد.

۱۳ــحاصل‌ضرب یک جمله‌ایهاــ می‌دانیم که عمل ضرب در مجموعهٔ R جابجایی است و از طرف دیگر همچنان‌که درشمارهٔ ۵ همین فصل گفتیم هریک جمله‌ای بــه منزلهٔ یک‌عدد

حقیقی است. بنابراین مثلاً حاصل ضرب:

$$(\frac{3}{5}ax^3y^2)\times(-2a^4x^5)$$

را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{3}{5}ax^3y^2(-2)a^4x^5=(\frac{3}{5})(-2)a^{1+4}x^{3+5}y^2$$

که هم‌ارز است با:

$$-\frac{6}{5}a^5x^8y^2$$

پس:

برای ضرب کردن چند یک‌جمله‌ای ابتدا ضرایب آنها را در هم ضرب می‌کنیم و سپس در دنبال آن همهٔ حروفی را که در یک‌جمله‌ایهای مفروض هستند می‌نویسیم به قسمی که نمای هر حرف مساوی با مجموع نماهای آن حرف در یک‌جمله‌ایهای مفروض باشد.

مثال ۱:

$$(\frac{3}{4}a^2x^3y)(-\frac{2}{5}ay^4)(2x^5y^2)=-\frac{3}{5}a^3x^8y^7$$

مثال ۲:

$$(-\frac{2}{3}ax^4y^2)^2=(-\frac{2}{3}ax^4y^2)(-\frac{2}{3}ax^4y^2)=\frac{4}{9}a^2x^8y^4$$

مثال ۳:

$$(5a^2x^3)^3=125a^6x^9$$

تمرین

۱ ــ جدول زیر را کامل کنید:

درجهٔ نسبت به همهٔ حروف	درجهٔ نسبت به x	ضریب	یک‌جمله‌ای ساده شده	یک‌جمله‌ای
				$(-\frac{2}{3})x\times\frac{5}{4}y^2$
				$(2x)\times 4y^3$
				$x^2\times(-2y)\times(-3x)$
				$5\times\frac{4}{3}\times x^3\times(-2y^2)$
				$4x^3\times(-5y^2)\times(-\frac{2}{3}a^3x^2y^4)$
				$5y^3\times(-2z^2)$

یک‌جمله‌ایهای زیر را ساده‌کنید و مقدار عددی آنها را به ازای مقادیر داده شدهٔ حروف حساب کنید :

۲ - $(-\frac{3}{2})a^2x^3 \times 5xy^2 \times (-\frac{2}{5})a^3y$ به‌ازای $a=3$ و $x=-2$ و $y=1$

۳ - $(\frac{2}{3})x^2 \times 7xy \times (-\frac{3}{4})ay$ به‌ازای $a=5$ و $x=2$ و $y=-3$

۴ - $\frac{7}{2}a^2 \times \frac{4}{3}x^3y \times (-\frac{5}{2})a^2y$ به‌ازای $a=\frac{2}{3}$ و $x=6$ و $y=3$

۵ - $\frac{4}{7}a^3 \times (-\frac{2}{5})bx \times (-\frac{4}{5})ab^2x$ به ازای $a=-1$ و $b=5$ و $x=-7$

مجموعهای جبری زیر را حساب کنید :

۶ $\frac{90}{189}a^2x^3 + \frac{45}{84}a^2x^3 - \frac{75}{126}a^2x^3$

۷ $\frac{51}{56}ax^2y^3 + \frac{88}{231}ax^2y^3 - \frac{26}{39}ax^2y^3$

۸ $\frac{77}{35}a^2bx - \frac{80}{66}a^2bx - \frac{56}{105}a^2bx$

۹ $\frac{123}{270}x^3y^5z - \frac{45}{175}x^3y^5z + \frac{77}{882}x^3y^5z$

حاصل‌ضربهای زیر را حساب کنید :

۱۰ $(5a^3b^2)(\frac{3}{5}a^2b^5)$

۱۱ $(\frac{7}{3}a^4b^3c)(-\frac{3}{5}ab^2c^3)$

۱۲ $(\frac{4}{5}a^3x^2y)(-\frac{7}{2}ax^3y^2)$

۱۳ $(-\frac{5}{12}ab^2xy)(-\frac{14}{5}a^3bx^3y^2)(-\frac{2}{7}a^2b^3xy^2)$

عبارات زیر را حساب کنید :

۱۴ $(-\frac{2}{5}a^2b^3x)^2$

۱۵ $(\frac{5}{3}ab^2x^4)^2$

۱۶ $(-\frac{3}{2}a^5b^4xy^2)^3$

۱۷ $(\frac{5}{4}a^3b^4xy^2)^2$

ج ـ چندجمله‌ایها

۱۴ ـ چند جمله‌ای ـ چند جمله‌ای عبارت است از مجموع جبری چند یك جمله‌ای .

معمولا یك‌یك‌جمله‌ای را یك چند جمله‌ای نیز مینامند. در این مقام چند بعنوان یك نیز تعبیر شده است. ولی هر گاه تأکیدی در کار باشد صریحاً تعداد جملات گفته میشود، مثل یك جمله‌ای $2x^3$ یا دوجمله‌ای $3x-5$ ویا سه جمله‌ای $5x^2-7x+11$ و نظایر آن.

مثال۱: $3a^2b-ab^3-\frac{2}{5}a^3+4b^5$ یك چند جمله‌ای از دو متغیر است.

مثال۲: $2x-x^2+5$ یك‌سه‌جمله‌ای از یك متغیر است.

۱۵ ـ ساده کردن چند جمله‌ای ـ اگر در چند جمله‌ای بعضی از جمله‌ها متشابه باشند می‌توان جمله‌های متشابه را دسته‌بندی کرد و به جای هردسته یك‌جمله‌ای هم‌ارزآن را قرار داد .

مثال : جمله‌های چند جمله‌ای :

$$4x^2-9x^3-2+7x+5x^2+15x^3-x^2-4x+3$$

را می‌توان به ترتیب زیر دسته‌بندی کرد :

$$(-9x^3+15x^3)+(4x^2+5x^2-x^2)+(7x-4x)+(-2+3)$$

و سپس جمله‌های متشابه را باهم جمع کرد تا حاصل شود :

$$6x^3+8x^2+3x+1$$

همیشه باید چند جمله‌ایها را بصورت ساده شده در آورد.

اگر چند جمله‌ای ساده شده فقط دو جمله داشته باشد آن را دوجمله‌ای و اگر فقط سه جمله داشته باشد آن را سه‌جمله‌ای می‌نامند .

مثال : $8x^2-\frac{5}{3}$ یك دوجمله‌ای و $9x^3+2x^2-3$ یك سه‌جمله‌ای است.

۱۶ـ درجهٔ یك‌چند جمله‌ای

اولا درجهٔ یك‌چند جمله‌ای ساده شده نسبت به یکی از حروف عبارت است از بزرگترین نمای آن حرف در چند جمله‌ای.

مثال ۱ : چندجمله‌ای $\frac{2}{5}x-8+2x^4$ **نسبت به حرف x از درجهٔ چهارم است.**

مثال ۲ : چندجمله‌ای $5x^6y^2-3x^4y^3+2xy^5$ نسبت به حرف x از درجهٔ ششم و نسبت به حرف y از درجهٔ پنجم است.

ثانیاً درجهٔ یك چندجمله‌ای ساده شده نسبت به چند حرف عبارت است از درجهٔ جمله‌ای که بزرگترین درجه را نسبت به آن حروف داراست.

مثال : چند جمله‌ای $4x^5y^2+5x^2y^4-3xy^2$ نسبت به x از درجهٔ پنجم و نسبت به y از درجهٔ چهارم است اما نسبت به x و y از درجهٔ $2+5$ یعنی از درجهٔ هفتم است زیرا جملهٔ $4x^5y^2$ در چندجمله‌ای بزرگترین درجه را نسبت به x و y دارد.

ملاحظه می‌شود که درجهٔ چندجمله‌ای نسبت به چند حرف معمولا مساوی با مجموع درجات آن نسبت به هریك از حروف نیست.

ثالثاً اگر همهٔ جمله‌های یك چندجمله‌ای نسبت به همهٔ حروف دارای یك درجه باشد آن چند جمله‌ای را یك چندجمله‌ای همگن می‌نامند.

۱۷ــ مرتب کردن چند جمله‌ای برحسب توان متغیرــ اولا اگر یك چند جمله‌ای فقط دارای یك متغیر باشد **بهتر است جمله‌ها را طوری در دنبال هم بنویسیم که درجات آنها به ترتیب صعودی و یا به ترتیب نزولی درپی هم قرارگیرند.**

مثال ۱ : چندجمله‌ای $7-2x+5x^2-7x^3$ **از چپ به راست برحسب توانهای** صعودی x مرتب شده است.

مثال ۲ : چندجمله‌ای $7x^3-3x^2+2x-1$ **از چپ به راست برحسب توانهای نزولی x مرتب شده است.**

وقتی یك چند جمله‌ای یك متغیری را برحسب توانهای صعودی یا نزولی متغیر مرتب می‌کنیم ممکن است **جمله‌های بعضی از درجات در چند جمله‌ای وجود نداشته باشد.**

مثال۳: چندجمله‌ای x^3-2x+1 از درجهٔ سه است، ولی جملهٔ درجهٔ دوم ندارد. می‌توان چندجمله‌ای فوق را چنین نوشت :

$$x^3+0\times x^2-2x+1$$

در موقع کار با چند جمله‌ایها که یك یا چند جمله ندارند بهتر است به‌جای جمله‌هایی که وجود ندارند، علامتی (مثلا یك ستاره) قرار دهیم. مثلا چند جمله‌ای مذکور را چنین می‌نویسیم :

$$x^3+\ *\ -2x+1$$

ثانیاً اگر یك چند جمله‌ای دارای چند متغیر باشد معمولا آن را برحسب توانهای صعودی یا نزولی یکی از متغیرها مرتب می‌کنند.

مثال ۴ : چند جمله‌ای $x^2y-3xy-2$ برحسب توانهای نزولی x مرتب شده

است.

مثال ۵ : چندجمله‌ای $2x^3-3x^2y-4xy^2+2y^3$ یك چندجمله‌ای همگن ازدرجهٔ سوم است که در عین حال از چپ به راست برحسب توانهای نـزولی x و توانهای صعودی y مرتب شده است.

۸ ا- مجموع چند جمله‌ایها- مجموع دویاچند ،چندجمله‌ای برابراست بایك چند جمله‌ای که از جمع کردن همهٔ جمله‌های آنها حاصل می‌شود.

مثال ۱ : اگر بخواهیم چندجمله‌ایهای زیر را باهم جمع کنیم :

$$-4a^2+5b-3 \;,\; 6a^2+3b-2 \;,\; a^2+5a-7b$$

می‌توانیم جمله‌های آنها را در دنبال یکدیگر بنویسیم :

$$a^2+5a-7b+6a^2+3b-2-4a^2+5b-3$$

و سپس این چندجمله‌ای را ساده کنیم تا به صورت زیر در آید :

$$3a^2+5a+b-5$$

مثال ۲ : برای جمع کردن چندجمله‌ایهایی که دارای یك متغیر باشند می‌توانیم آنها را پس‌از مرتب کردن طوری زیر یکدیگر بنویسیم که جمله‌های متشابه زیر یکدیگر قرار گیرند و سپس جمله‌های متشابه را باهم جمع کنیم (به جای جمله‌هایی کـه وجود ندارنـد می‌توان مثلا ستاره قرار داد).

مثلا برای جمع کردن چندجمله‌ایهای زیر

$$A=\;6-8x+4x^2$$
$$B=\;2-5x+4x^3$$
$$C=\;2x^3-3-2x-x^2$$

چنین می‌نویسیم :

$$\begin{array}{lrrrr} A= & & 4x^2 & -8x & +6 \\ B= & 4x^3+ & * & -5x & +2 \\ C= & 2x^3- & x^2 & -2x & -3 \\ \hline & 6x^3+ & 3x^2 & -15x & +5 \end{array}$$

۹ ا- قرینهٔ یك چندجمله‌ای - می‌دانیم کـه هر عـدد حقیقی یـك قرینه دارد. اکنون چندجمله‌ای

$$A=3a^2+6a-7b$$

را در نظر می‌گیریم و علامت همهٔ جمله‌های آن را عوض می‌کنیم تا چندجمله‌ای زیر به دست آید :

$$A' = -۳a^{۲} - ۶a + ۷b$$

مقادیر عددی A و A' به ازای جمیع مقادیر a و b قرینهٔ یکدیگرند . $A' = -A$، و مجموع $A + A'$ همیشه مساوی با صفر است.

دو چندجمله‌ای A و A' را قرینهٔ یکدیگر می‌نامند.

برای به دست آوردن قرینهٔ یك چندجمله‌ای کافی است علامت همهٔ جمله‌های آن را عوض کنیم.

مثال : $-(۳x^{۲} + ۴xy - ۷) = -۳x^{۲} - ۴xy + ۷$

۲۰ـ تفاضل دو چندجمله‌ای ـ برای محاسبهٔ تفاضل $A - B$ کافی است قرینهٔ B را با A جمع کنیم.

مثال :

$$(۳a^{۲} + ۶a - ۷b) - (۲a^{۲} - ۴a + ۳b)$$
$$= ۳a^{۲} + ۶a - ۷b + (-۲a^{۲} + ۴a - ۳b)$$
$$= a^{۲} + ۱۰a - ۱۰b$$

۲۱ـ مجموع جبری چندجمله‌ایهایی که یك متغیر دارند ـ در این حالت بهتر است چندجمله‌ایها را مرتب و در صورت لزوم آنها را (با قراردادن ستاره به جای جمله‌های غیرموجود) کامل کنیم و قرینهٔ چندجمله‌ایهایی را که باید کم کرد به دست آوریم و همان‌گونه که در مثال ۲ شمارهٔ ۱۸ همین فصل گفتیم آنها را زیر یکدیگر بنویسیم ومجموع جبری را حساب کنیم.

مثال : چندجمله‌ایهای زیر را در نظر می‌گیریم :

$$A = ۲ - ۵x + ۴x^{۳}$$
$$B = -۸x + ۴x^{۲} + ۶$$
$$C = -۲x^{۳} + ۳ + x^{۲} + ۲x$$

اگر بخواهیم مجموع جبری $S = A - B + C$ را حساب کنیم چنین می‌نویسیم :

$$\begin{array}{rl} A = & ۴x^{۳} + \ * \ - ۵x + ۲ \\ -B = & \ * \ - ۴x^{۲} + ۸x - ۶ \\ C = & -۲x^{۳} + x^{۲} + ۲x + ۳ \\ \hline S = & ۲x^{۳} - ۳x^{۲} + ۵x - ۱ \end{array}$$

به این ترتیب جمله‌های متشابه ساده شده و نتیجه به صورت چندجمله‌ای مرتب شده به دست می‌آید.

۲۲ـ حاصلضرب چندجمله‌ایها ـ اگر فرض کنیم که به‌جای حروفی که در چند‌جمله‌ایها وجود دارند اعداد حقیقی قرار داده باشیم مسئلهٔ ضرب دو چندجمله‌ای تبدیل به ضرب دو مجموع جبری می‌شود :

برای محاسبهٔ حاصلضرب دو چندجمله‌ای کافی است هر جمله از یکی از آنها را در همهٔ جمله‌های دیگری ضرب کرده مجموع جبری حاصلها را به دست آوریم.

برای محاسبهٔ حاصل ضرب چندین چندجمله‌ای در یکدیگر کافی است که با استفاده از اصلهای توزیع‌پذیری، شرکت‌پذیری وجابجایی عمل ضرب ، دوتا ازآنها را درهم‌ضرب کرده حاصل را در سومی ضرب کنیم و عمل را ادامه دهیم .

مثال ۱ : حالت خاص ضرب چندجمله‌ای در یك‌جمله‌ای :

$$
\begin{aligned}
&(a^2x^3-5x+3a)(-2a^3x)\\
&=(a^2x^3)(-2a^3x)+(-5x)(-2a^3x)+(3a)(-2a^3x)\\
&=-2a^5x^4+10a^3x^2-6a^4x
\end{aligned}
$$

مثال ۲ :

$$
\begin{aligned}
(3x^2-2x+y)(3x-y)&=9x^3-6x^2+3xy-3x^2y+2xy-y^2\\
&=9x^3-3x^2y+5xy-6x^2-y^2
\end{aligned}
$$

مثال ۳ : در حالت دوچندجمله‌ای که دارای یك متغیر باشند بهتر است به طریق زیر عمل کنیم :

فرض کنیم که می‌خواهیم دوچندجمله‌ای :

$$A=3x^3-2+5x$$
$$B=2x^2-4x+3$$

را درهم ضرب کنیم. چنین می‌نویسیم :

$$
\begin{array}{ll}
 & A=3x^3\quad *\quad +5x\quad -2\\
 & B=\;\;*\quad 2x^2\quad -4x\quad +3\\
\hline
A\times 2x^2 & =6x^5\quad *\quad +10x^3-4x^2\\
A\times(-4x) & =\quad -12x^4\quad *\quad -20x^2+8x\\
A\times 3 & =\quad\quad 9x^3\quad *\quad +15x-6\\
\hline
A\times B & =6x^5-12x^4+19x^3-24x^2+23x-6
\end{array}
$$

به این ترتیب حاصل‌ضرب به صورت ساده شده و مرتب شده به‌دست می‌آید.

ضمناً ملاحظه می‌کنیم که درجهٔ حاصل‌ضرب در این‌حالت مساوی است با مجموع درجات دوعامل.

مثال ۴ : حاصل‌ضرب سه چندجمله‌ای :

$$A = 3x^2 - 1 \quad \text{و} \quad B = 2x + 1 \quad \text{و} \quad C = 4x^2 - 2x + 1$$

چنین عمل می‌کنیم :

$$A \times B = (3x^2 - 1)(2x + 1) = 6x^3 + 3x^2 - 2x - 1$$

$$A \times B \times C = (6x^3 + 3x^2 - 2x - 1)(4x^2 - 2x + 1)$$

$$= 24x^5 - 8x^3 + 3x^2 - 1$$

توجه کنید که اگر مثلا ابتدا $A \times C$ وبعد $A \times C \times B$ را حساب کنیم حاصل مساوی با $A \times B \times C$ خواهد بود (زیرا عمل‌ضرب دارای خاصیتهای جابجایی وشرکت پذیری‌است)

مثال ۵ : مربع و مکعب چندجمله‌ایها :

$$(2x - y)^2 = (2x - y)(2x - y) = 4x^2 - 2xy - 2xy + y^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$$

$$(2x - y)^3 = (2x - y)^2(2x - y) = (4x^2 - 4xy + y^2)(2x - y)$$

$$= 8x^3 - 8x^2y + 2xy^2 - 4x^2y + 4xy^2 - y^3$$

$$= 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$$

تمرین

درجهٔ هریك ازچندجمله‌ایهای زیر را اولا نسبت به a وثانیاً نسبت به x وثالثاً نسبت به a و x تعیین کنید:

۱ $2a^5-4a^3x^3+10ax-7a^5$

۲ $a^2x^2-ab^2x+b^4$

۳ $4ax^3-7a^2x^2+2a^3x-b^2x^4$

۴ $ax^4+2a^3x-ax^3+ax$

چندجمله‌ایهای زیر را ساده و برحسب توانهای نزولی x مرتب کنید:

۵ $7x^3+4y^3-3x^2y-xy^2$

۶ $2x^4-3x^2-7x^2+x^3-2$

۷ $25a^2x^2-3a^4-ax^3+y^4+x^3y$

۸ $y^4+6x^3y-x^4-3x^2y^2+2xy^3$

۹ $10x^4-15a^2x^2-5ax^3-4a^3x+6ax^3+2a^2x^2$

چندجمله‌ایهای زیر را ساده و برحسب قوای صعودی a مرتب کنید:

۱۰ $a^2-3a^3-5a^2+4a^3+3+7a^3-4$

۱۱ $b^3+3a^2b+3ab^2+a^3+5a^2b-3b^3-3ab^2$

مجموع چندجمله‌ایهای زیر را حساب کنید:

۱۲ $4ab^2+2ac$ و $-5ac+2ab^2$

۱۳ $4x^2-5y^2$ و $3xy+2y^2$

۱۴ $3(a^2-b^2)$ و $5(a^2+b^2)$

۱۵ $3x-7y$ و $3y+2x$ و $-7x+4y$

۱۶ $-3x+2y+z$ و $3x+7y-2z$

۱۷ $2x+3y-z$ و $-x+y+2z$ و $3x-y+z$

۱۸ $2x^3+3-x$ و $2x+5x^2-5$ و $3x^2-x-3$

۱۹ x^5+3x^2-2x+7 و $x^5-4x^4+3x^3-9$

مجموعهای جبری زیر را حساب کنید :

۲۰. $x^2-(y^2-z^2)$

۲۱. $(2x-3y+4z)-(5z-5x-4y)$

۲۲. $(6x+5y)-(4x+y-3z)-(2z+5x+3y)$

۲۳ - چندجمله‌ایهای زیر را در نظر می گیریم :

$$A=x^2-4x+5$$

$$B=2x^2+5x-6$$

$$C=3x^2-2x-1$$

عبارات زیر را حساب کنید :

$$C+A-B\ ,\ B+C-A\ ,\ A+B-C\ ,\ A+B+C$$

ضربهای زیر را انجام دهید :

۲۴. $5a^3b^2(\frac{3}{5}a^2b^5-2ab^3)$

۲۵. $7a^2bc(3a+b-4c)$

۲۶. $3ay^2c^2(2a^3-3y^2+4c)$

۲۷. $-5a^2b^3c^4(a-3b^2+2c^3)$

۲۸. $(7ab+3cd)(4ab+3cd)$

۲۹. $(5a^2b+9ab^2)(3a+4b)$

۳۰. $(4a^3+3a^2b+b^3)(2ab^2-a^2b)$

۳۱. $(\frac{x^2}{3}-2x+\frac{5}{4})(\frac{7}{2}-\frac{x}{3})$

۳۲. $(3x+5)(2x-3)(4x-1)$

۳۳. $(2x+3)(3x+4)(6x-7)$

۳۴. $(3x+5)(x^2-4)(3x-5)$

۳۵. $(3x^2-5x+2)^2$

د ـ اتحادهای مهم

هر تساوی حرفی که بازاء همهٔ مقادیرعددی که بجای حروف قرار داده می‌شود درست باشد اتحاد نامیده می‌شود.

۲۴ـ مربع مجموع یا تفاضل دو جمله

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2$$

و از آنجا اتحاد :

$$\forall a,b\in R \quad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad (1)$$

اگر در اتحاد فوق b را به b− تبدیل کنیم حاصل می‌شود :

$$\forall a,b\in R \quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \qquad (2)$$

مثال ۱ : می‌خواهیم $(3x+5)^2$ را حساب کنیم. دراتحاد (۱) به جای a مقدار $3x$ و به جای b عدد ۵+ را قرار می‌دهیم :

$$(3x+5)^2=(3x)^2+2\times 3x\times 5+5^2=9x^2+30x+25$$

مثال ۲ : می‌خواهیم $(2x^2-3y)^2$ را حساب کنیم.

در اتحاد (۲) به جای a مقدار $2x^2$ و به جای b مقدار $3y$ را می‌گذاریم :

$$(2x^2-3y)^2=(2x^2)^2-2\times 2x^2\times 3y+(-3y)^2$$
$$=4x^4-12x^2y+9y^2$$

۲۵ - حاصل‌ضرب مجموع دو جمله در تفاضل همان دو جمله

$$(a+b)(a-b)=a^2+ab-ba-b^2$$

و از آنجا اتحاد :

$$\forall a,b\in R \quad (a+b)(a-b)=a^2-b^2 \qquad (3)$$

مثال ۱ : $(2x+3)(2x-3)=4x^2-9$

مثال ۲ : $(\frac{2}{3}x^2-4y)(\frac{2}{3}x^2+4y)=\frac{4}{9}x^4-16y^2$

مثال ۳ : $(a+b-c)(a-b+c)=[a+(b-c)][a-(b-c)]$

$$=a^2-(b-c)^2$$
$$=a^2-b^2-c^2+2bc$$

۲۶ - مربع مجموع جبری سه جمله - می‌خواهیم $(a+b+c)^2$ را حساب کنیم .

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$

و از آنجا اتحاد :

$$(4) \qquad \boxed{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$$

همچنین می‌توانیم $(a-b+c)^2$ را با استفاده از اتحاد فوق حساب کنیم. کافی است در آن اتحاد b را به $-b$ تبدیل کنیم :

$$(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$$

معمولا در موقع محاسبه هر جمله را با علامت آن یکجا در نظر می‌گیرند. یعنی مثلا در اتحاد (۴) می‌توان به جای a (یا b یا c) اعداد -3 یا -5 یا $-x^2$ و غیره را قرار داد.

مثال :

$$(2x-3y+5z)^2=4x^2+9y^2+25z^2-12xy+20xz-30yz$$

۲۷ـ مکعب مجموع یا تفاضل دو جمله

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$$
$$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$$

و از آنجا اتحاد :

$$(5) \qquad \boxed{\forall a,b\in R\ (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

اگر در اتحاد فوق b را به $-b$ تبدیل کنیم حاصل می‌شود :

$$(6) \qquad \boxed{\forall a,b\in R\ (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$$

توجه کنید که در اتحادهای (۵) و (۶) عبارات سمت راست، هر یک، یک چهارجمله‌ای همگن از درجهٔ سوم برحسب a و b است که از چپ به راست نسبت به توانهای نزولی a و صعودی b مرتب شده است .

مثال ۱ : $(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$

مثال ۲ : $(2x-5y)^3=8x^3-60x^2y+150xy^2-125y^3$

۲۸ـ مجموع و تفاضل مکعب دو عبارتـ صحت اتحادهای زیر به‌وسیلهٔ انجام‌دادن عمل ضرب ثابت می‌شود :

$$\forall a,b\in R \quad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \qquad (7)$$

$$\forall a,b\in R \quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad (8)$$

مثال ۱ : $a^3+8=a^3+2^3=(a+2)(a^2-2a+4)$

مثال ۲ : $8x^3+27y^3=(2x)^3+(3y)^3$

$$=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$$

مثال ۳ : $8a^3-125=(2a)^3-(5)^3=(2a-5)(4a^2+10a+25)$

مثال ۴ :

$$27x^3-64y^6=(3x)^3-(4y^2)^3=(3x-4y^2)(9x^2+12xy^2+16y^4)$$

۲۹ـ حاصل‌ضرب دو، دوجمله‌ای که در یک جمله شریک باشند

$$\forall a,b,x\in R \quad (x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab \qquad (9)$$

صحت اتحاد بالا به‌وسیلهٔ انجام دادن عمل‌ضرب ثابت میشود .

مثال ۱ : $(x-3)(x+4)=x^2+x-12$

مثال ۲ : $(2x+3a)(2x-4)=4x^2+2(3a-4)x-12a$

۳۰ـ اتحادهای دیگر ـ اتحادهای فوق همواره در محاسبات جبری مورد استفاده واقع می‌شوند و بهتر است آنها را به خاطر سپرد. صحت اتحادهای زیررا که اهمیت آنها کمتر است می‌توانید به عنوان تمرین ثابت کنید :

(الف) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

(ب) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

(ج) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

تبصره : گاهی اوقات در اتحادها ، بجای تساوی از نماد $\equiv$ که بهمعنای هم ارزی است نیز استفاده می‌شود : $(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$

تمرین

مربعهای زیررا حساب کنید :

۱ $(2x+3y)^2$

۲ $(3x-y)^2$

۳ $(\frac{1}{2}x+\frac{y}{3})^2$

۴ $(\frac{x}{2}-\frac{y}{5})^2$

۵ $(ax-by)^2$

۶ $(1+4abc)^2$

۷ $(x^2-3b^2)^2$

۸ $(2ab^2-5)^2$

۹ $(0/3a^2+0/2b^2)^2$

ضربهای زیر را انجام دهید :

۱۰ $(2x-1)(2x+1)$

۱۱ $(3x-2y)(3x+2y)$

۱۲ $(2a-3b)(2a+3b)$

۱۳ $(4x-3y)(4x+3y)$

۱۴ $(\frac{x}{3}-\frac{2y}{5})(\frac{x}{3}+\frac{2y}{5})$

۱۵ $(x^2+2)(x^2-2)$

۱۶ $(2a^2+b^2)(2a^2-b^2)$

۱۷ $(2xy^2+c^2)(2xy^2-c^2)$

توانهای زیر را حساب کنید :

۱۸ $(a+b+1)^2$

۱۹ $(a+b-1)^2$

۲۰ $(a-b-c)^2$

۲۱ $(3x^2+4x+3)^2$

۲۲ $(x^2-5x+1)^2$

۲۳ $(x^2-2x-5)^2$

۲۴ $(a^2-b^2+1)^2$

۲۵ $(3x^2-4x+\sqrt{3})^2$

۲۶ $(a-b+c+2)^2$

۲۷ $(x^3-5x^2+2x+1)^2$

۲۸ $(2-x-x^2+3x^3)^2$

مکعبهای زیر را حساب کنید :

۲۹ $(x+1)^3$

۳۰ $(x-1)^3$

۳۱ $(2x-1)^3$

۳۲ $(2x+3)^3$

۳۳ $(2x+y)^3$

۳۴ $(ax-by)^3$

۳۵ $(2+abc)^3$

۳۶ $(x^2-5b^2)^3$

۳۷ $(2ab^2c^3-1)^3$

۳۸ $(0/3a^2-0/2b)^3$

حاصلضربهای زیر را با استفاده از اتحادهای (۷) و (۸) به دست آورید :

۳۹ $(a-2)(a^2+2a+4)$

۴۰ $(a+2)(a^2-2a+4)$

۴۱ $(x^2-1)(x^4+x^2+1)$

۴۲ $(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$

۴۳ $(x^2-2y)(x^4+2x^2y+4y^2)$

۴۴ $(2a^2+b)(4a^4-2a^2b+b^2)$

۴۵ $[(3a+b^2)+2][(3a+b^2)^2-2(3a+b^2)+4]$

۴۶ $[(2x+y)-3][(2x+y)^2+3(2x+y)+9]$

درعبارات زیر به جای... جمله‌ای قراردهید که هریك از آنها مربع یك دوجمله‌ای شود:

۴۷ $x^2+\ldots+16$

۴۸ $x^2-\ldots+25$

۴۹ $4x^2+\ldots+a^2$

۵۰ $25a^2x^2-\ldots+b^2$

۵۱ $x^2-6x+\ldots$

۵۲ $4x^2-3x+\ldots$

۵۳ $9x^2-6ax+\ldots$

۵۴ $4x^2-6bx+\ldots$

۵۵ $4a^2-12ab+\ldots$

۵۶ $x^2y^4z^2-3x^2y^3z^3+\ldots$

حاصل عبارات زیر را حساب کنید :

۵۷ $(x^2+2x-1)(x^2-2x+1)$

۵۸ $(a+2b+c-d)(a-2b+c+d)$

حاصلضربهای زیر را با استفاده از اتحاد (۹) بدست آورید :

۵۹ $(x+7)(x-3)$

۶۰ $(x-1)(x-12)$

۶۱ $(2x-5)(2x+1)$

۶۲ $(7-3x)(4x+7)$

۶۳ $(x-3a)(x+7a)$

۶۴ $(2x^3+4)(2x^3-7)$

۶۵ $(tg-4)(-5+tg)$

۵ ـ تقسیم چندجمله‌ایها

۳۱ ـ تعریف ـ اگر A و B دوچند جمله‌ای باشند، خارج قسمت $\frac{A}{B}$ را یك کسر گویا مینامند. توجه کنید که $\frac{A}{B}$ فقط بازای مقادیری که $B\neq 0$ معنی دارد.

چون عدد یك را میتوان بعنوان یك چند جمله‌ای درنظر گرفت و هرچند جمله‌ای مانند A را میتوان بصورت $\frac{A}{1}$ نوشت، پس هرچند جمله‌ای یك کسر گویا نیزهست. پس مجموعهٔ کسرهای گویا شامل مجموعهٔ چندجمله‌ایها نیزمی باشد.

مثال: عبارات زیر کسرهای گویا هستند.

$$\frac{7x^2-3x+5}{x^2-3x} \text{ و } \frac{1}{3x-2y} \text{ و } 2ab-3x \text{ و } 12$$

۳۲ــ قابلیت تقسیم ــ چند جمله‌ای A را برچند جمله‌ای B قابل قسمت گوئیم هرگاه یك چند جمله‌ای مانند C موجود باشد به‌قسمی‌که $A=B\cdot C$، دراین حالت C راخارج‌قسمت دقیق تقسیم A بر B می‌نامند.

مثال: دوجمله‌ای x^2-1 بر $x-1$ قابل‌قسمت است زیرا :

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

ودراینجا خارج‌قسمت دقیق $x+1$ می‌باشد.

۳۳ـ الف) تقسیم یك‌جمله‌ای بر یك‌جمله‌ای

مثال ۱ : خارج‌قسمت تقسیم $3a^4x^3y$ بر $2a^3xy$ عبارت‌است از :

$$\frac{3a^4x^3y^2}{2a^3xy}=\frac{3}{2}a^{4-3}x^{3-1}y^{2-1}=\frac{3}{2}ax^2y$$

دراین مثال خارج‌قسمت دقیق است وبه‌صورت یك جمله‌ای $\frac{3}{2}ax^2y$ درآمد. زیرا: نمای هرحرف درمقسوم‌علیه ازنمای همان حرف درمقسوم کوچکتر و یا باآن مساوی است.

توجه کنیدکه دراین حالت ضریب خارج‌قسمت مساوی است با خارج‌قسمت دقیق ضریب صورت برضریب مخرج و نمای هرحرف مساوی است با نمای‌آن حرف درصورت منهای نمای همان حرف در مخرج.

مثال ۲ : خارج‌قسمت تقسیم $-\frac{1}{3}xy^3z^4$ بر $-\frac{1}{2}x^2y^2z$ عبارت‌است از :

$$\frac{-\frac{1}{3}xy^3z^4}{-\frac{1}{2}x^2y^2z}=\frac{2yz^3}{3x}$$

دراین مثال خارج قسمت به صورت چند جمله‌ای درنیامد. زیرا نمای حرف x در مخرج بیشتر از نمای آن در صورت است.

توجه کنید کـه مقدار $\frac{2yz^3}{3x}$ فقط‌وقتی معین است که x صفر نباشد.

۳۴ـ نتیجه ـ از آنچه گذشت معلوم می‌شود که :

برای آن‌که یك‌جمله‌ای A بر یك‌جمله‌ای B قابل‌قسمت باشد لازم و کافی است که A شامل همهٔ حروف B با نماهای لااقل متساوی باشد.

۳۵ـ ب) تقسیم چندجمله‌ای بر یک‌جمله‌ای غیر از صفر

مثال ۱ : برای به دست آوردن خارج‌قسمت چندجمله‌ای :

$$6a^3x^2y - 5a^3x^4 + 2a^4x^2y$$

بر یک‌جمله‌ای $2a^3x^2$ هریک ازجمله‌های مقسوم را برمقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم :

$$\frac{6a^3x^2y - 5a^3x^4 + 2a^4x^2y}{2a^3x^2} = 3y - \frac{5}{2}x^2 + ay$$

دراین مثال خارج‌قسمت دقیق است و به‌صورت چند‌جمله‌ای $3y - \frac{5}{2}x^2 + ay$ درآمد.
زیرا: هر یك از جمله‌های مقسوم بر مقسوم‌علیه قابل‌قسمت است.

مثال ۲ : خارج قسمت‌چندجمله‌ای $3x^2 - 4xy + 2$ بریك‌جمله‌ای $5xy$ دقیق نیست و آن را به‌صورت کسر گویای $\frac{3x^2 - 4xy + 2}{5xy}$ می‌نویسند. کسرهـای‌گویا را بعداً بررسی خواهیم کرد .

۳۶ـ نتیجه ـ از آنچه گذشت معلوم می‌شود که :

برای آن که چندجمله‌ای A بر یك‌جمله‌ای B قابل‌قسمت باشدلازم و کافی‌است که همهٔ جمله‌های مقسوم بر مقسوم‌علیه قابل‌قسمت باشند. $(B \neq 0)$

۳۷ـ ج) تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای

فقط حالتی را در نظر می‌گیریم که دو چندجمله‌ای دارای یك متغیر باشند.
دو چندجمله‌ای A و B را که دارای یك متغیر x هستند در نظر می‌گیریم :
اگردرجهٔ A ازدرجهٔ B کمترباشد و $A \not\equiv 0$ خارج قسمت تقسیم A بر B دقیق نیست و به صورت کسر گویای $\frac{A}{B}$ نوشته می‌شود.

اگر درجهٔ A مساوی با درجهٔ B یا بیشتر از درجهٔ B باشد مقصود از تقسیم کردن A بر B یافتن دوچند جمله‌ای Q و R است به‌قسمی که $R = 0$ یادرجهٔ R از درجهٔ B کمتر بوده و داشته باشیم:

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B} \qquad B \neq 0$$

یعنی :

$$\frac{\text{مقسوم}}{\text{مقسوم‌علیه}} = \text{خارج‌قسمت} + \frac{\text{باقیمانده}}{\text{مقسوم‌علیه}} \qquad (1)$$

و یا :

$$A = B \cdot Q + R \qquad (2)$$

قاعده ـ برای تقسیم‌کردن چندجمله‌ای A بر چندجمله‌ای B قاعدهٔ زیر را به کار می‌بریم :

اولاً هر دو چندجمله‌ای را برحسب قوای نزولی حرف مشترك مرتب می‌کنیم .

ثانیاً نخستین جملهٔ مقسوم را بر نخستین جملهٔ مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم تا نخستین جملهٔ خارج‌قسمت به دست آید.

ثالثاً این نخستین جملهٔ خارج‌قسمت را در مقسوم‌علیه ضرب کرده حاصل را از مقسوم کم می‌کنیم تا نخستین باقیمانده به‌دست آید و آن را مقسوم جدید می‌نامیم.

رابعاً اعمال فوق را در بارهٔ هر یك ازمقسومهای جدید تکرار می‌کنیم تا به‌باقیمانده‌ای برسیم که یا صفر باشد و یا آن‌که درجهٔ آن از درجهٔ مقسوم‌علیه کمتر باشد.

مثال ۱ : می‌خواهیم $3x^3+4x^2-19x+10$ را بر $3x-2$ تقسیم کنیم. چون مقسوم و مقسوم‌علیه برحسب قوای نزولی x مرتب هستند صورت عمل چنین است:

$$\begin{array}{rl|l}
\text{(مقسوم)} & 3x^3+4x^2-19x+10 & 3x-2 \ \text{(مقسوم‌علیه)} \\
 & \underline{-3x^3+2x^2} & x^2+2x-5 \ \text{(خارج‌قسمت)} \\
\text{نخستین باقیمانده} & 6x^2-19x+10 & \\
 & \underline{-6x^2+4x} & \\
\text{دومین باقیمانده} & -15x+10 & \\
 & \underline{+15x-10} & \\
\text{(آخرین باقیمانده)} & 0 &
\end{array}$$

در این مثال باقیمانده صفر شد یعنی مقسوم برمقسوم‌علیه قابل‌قسمت است.

برای امتحان صحت عمل اگر حاصل‌ضرب خارج‌قسمت را در مقسوم‌علیه حساب کنیم باید مساوی با مقسوم باشد :

$$(x^2+2x-5)(3x-2)=3x^3+4x^2-19x+10$$

مثال ۲ : می‌خواهیم $6x^4+10x-7x^3-23$ را بر $3x^2+5-2x$ تقسیم کنیم. مقسوم ومقسوم‌علیه رابرحسب قوای نزولی x مرتب می‌کنیم واگرجمله‌ای ازدرجه‌ای ناقص بود به‌جای آن یك ستاره قرار می‌دهیم و مانند مثال سابق عمل می‌کنیم :

$$\begin{array}{rl|l}
\text{(مقسوم)} & 6x^4-7x^3+\ * \ +10x-23 & 3x^2-2x+5 \ \text{(مقسوم‌علیه)} \\
 & \underline{-6x^4+4x^3-10x^2} & 2x^2-x-4 \ \text{(خارج‌قسمت)} \\
\text{(نخستین باقیمانده)} & -3x^3-10x^2+10x-23 & \\
 & \underline{+3x^3-2x^2+5x} & \\
 & -12x^2+15x-23 & \\
 & \underline{12x^2-8x+20} & \\
\text{(باقیمانده)} & 7x-3 &
\end{array}$$

در این مثال باقیماندهٔ نهایی $7x - 3$ است.

بـرای امتحان صحت عمل حاصلضرب خارج‌قسمت در مقسوم‌علیه را حساب کرده بـا باقیمانده جمع می‌کنیم باید مقسوم به دست آید :

$$6x^4 - 7x^3 + 10x - 23 = (3x^2 - 2x + 5)(2x^2 - x - 4) + 7x - 3$$

تمرین

تقسیمهای زیر را انجام دهید:

۱ $6xy : 3y$ ۲ $-12a^3b : 4a^2b$

۳ $6b^3x^3 : 3b^2x$ ۴ $\frac{3}{2}x^2y^4 : (-\frac{5}{6}xy)$

۵ $-\frac{1}{3}a^4b^5c : \frac{7}{12}bc$ ۶ $8a^4b^4c^2 : 4a^3b^2c^2$

۷ $4a^5b^2 : 3a^3b^2$ ۸ $-6x^3y^2z : 5xyz$

تقسیمهای زیر را انجام دهید :

۹ $(25b^3 - 20b^4c^4 + 5a^2b^4) : 5b^2$

۱۰ $(-bcx^3 - 2b^2cx^2 - 3bc^2x) : (-bcx)$

۱۱ $(6a^4b^3 + 12a^3b^4 - 6a^2b^5) : 3a^2b^2$

۱۲ $(-4x^3y^2z^3 + 6x^2y^5z^3 - 8xy^2z^4) : (-2xy^2z^3)$

۱۳ $(-8a^4b^3c^2 + 6a^5b^4c^3 - 8ab^2c^3) : (-2abc^2)$

۱۴ $(-\frac{4}{5}a^5 + \frac{7}{8}a^6 - \frac{3}{4}a^7 - \frac{1}{2}a^4) : (-\frac{1}{2}a^4)$

خارج‌قسمت و باقیماندهٔ هریك از تقسیمهای زیر را به دست آورده و نتیجهٔ هر تقسیم را به صورت رابطهٔ (۱) شمارهٔ ۳۷ همین فصل بنویسید :

مثال :

$$
\begin{array}{r|l}
5x^3 + \ * \ - 14x + 3 & x - 2 \\
\cline{2-2}
\underline{-5x^3 + 10x^2} \qquad\qquad & 5x^2 + 10x + 6 \\
10x^2 - 14x + 3 & \\
\underline{-10x^2 + 20x} \qquad & \\
6x + 3 & \\
\underline{-6x + 12} & \\
15 &
\end{array}
$$

پس : $\frac{5x^3 - 14x + 3}{x - 2} = 5x^2 + 10x + 6 + \frac{15}{x - 2}$

این تقسیم فقط وقتی معنی دارد که $x \neq 2$ باشد. چرا ؟

۱۵ $(x^2-7x+10):(x-5)$

۱۶ $(3x^2-13x+4):(x-4)$

۱۷ $(2x^3-7x^2+11x-4):(2x-1)$

۱۸ $(4x^2+5x-6):(2x-3)$

۱۹ $(5x^3-2x^2+3x-4):(x^2-2x+1)$

خارج‌قسمت و باقیماندهٔ هریك از تقسیمهای زیر را معین کنید:

۲۰ $(6x^3-17x^2+14x-3):(2x-3)$

۲۱ $(2x^6+7x^4+7x^2+2):(x^2+1)$

و ـ تجزیه (تبدیل) چندجمله‌ایها به‌حاصل‌ضرب‌عاملهای اول (فاکتورگیری)

۳۸ـ تبدیل (یا تجزیه) یك‌عبارت جبری به‌حاصل‌ضرب چند عامل اول (فاکتورگیری) غالباً در محاسبات از قبیل ساده کردن کسرهـا و حل معادلات بکار می‌آید. در عمل بیشتر تبدیل چندجمله‌ایهایی که ضرایب آنها اعداد گویا هستند مورد احتیاج است که باید آنهـا را به حاصل‌ضرب دوجمله‌ایها یا چندجمله‌ایها تبدیل کنیم.

۳۹ـ چند جمله‌ایهای اولـ پیش‌از این دیدیم که هرعدد طبیعی تجزیه پذیر را می‌توان به‌حاصل‌ضرب عاملهای اول تبدیل کرد. مثلاعدد ۳۰ به حاصل‌ضرب ۵ × ۳ × ۲ تبدیل می‌شود در تبدیل چندجمله‌ایها به حاصل‌ضرب عاملها نیز باید تبدیل‌راآن‌قدرادامه دهیم تا هرعامل‌رادیگر نتوان به حاصل‌ضرب عاملهای دیگر تبدیل کرد.

یك چند جمله‌ای راکه ضرایب آن عددهای درست باشند اول می‌نامند هرگاه نتوان‌آن را به حاصلضرب دوچند جمله‌ای با ضرایب درست که هر دوی آنها مخالف یك باشند تجزیه نمود.

مثال: $x-1$ و $x-6$ عاملهای اول سه‌جمله‌ای x^2-7x+6 هستند. زیرا:

$$x^2-7x+6=(x-6)(x-1)$$

و نمی‌توان $x-1$ و $x-6$ را به حاصل‌ضرب عاملهای دیگر تجزیه‌کرد.

۴۰ـ تبصرهـ درتبدیل چندجمله‌ایها به‌حاصل‌ضرب عاملها تغییردادن علامت عاملها به نحوی که در علامت چندجمله‌ای تغییری‌داده نشود مجاز است.

مثلا x^2-7x+6 را می‌توان به صورت $(x-6)(x-1)$ ویا $(6-x)(1-x)$ و یا $-(x-1)(6-x)$ تبدیل کرد.

۴۱-عامل مشترك گرفتن- چندجمله‌ای زیر را درنظرمی‌گیریم :

$$a^3x^2y-\frac{5}{2}a^3x^4+\frac{2}{3}a^4x^2y$$

همهٔ جمله‌های این چندجمله‌ای بر a^3x^2 قابل‌قسمت هستند و می‌توان نوشت :

$$a^3x^2y-\frac{5}{2}a^3x^4+\frac{2}{3}a^4x^2y=a^3x^2\left(y-\frac{5}{2}x^2+\frac{2}{3}ay\right)$$

می‌گویند که از یك‌جمله‌ای a^3x^2 در چندجمله‌ای مفروض فاکتور یا عامل مشترك گرفته شده است.

فقط از جمله‌ای می‌توان عـامل مشترك گرفت کـه همهٔ جمله‌های چندجمله‌ای بر آن قابل‌قسمت باشند .

یك جمله‌ای با بزرگترین درجه‌ای را که می‌توان در یك چند جمله‌ای عامل مشترك قرار داد ازهمهٔ حروف موجود درچند جمله‌ای باکوچکترین نما تشکیل می‌شود.

ضریب این یك‌جمله‌ای اختیاری است. می‌توان طوری آن ضریب را انتخاب‌کرد کـه همهٔ مخرجها از داخل پرانتز حذف شوند . مثلا درچندجمله‌ای فوق می‌توان $\frac{1}{6}a^3x^2$ را عامل مشترك قرارداد و نوشت :

$$a^3x^2y-\frac{5}{2}a^3x^4+\frac{2}{3}a^4x^2y=\frac{1}{6}a^3x^2\left(6y-15x^2+4ay\right)$$

اگر ضرایب چند جمله‌ای اعداد درست باشند واضح است که می‌توان بزرگترین شمارندهٔ مشترك‌آنها را ضریب‌عامل مشترك قرارداد.

مثال :

$$12xyz+28y^2z-88yz^2=4yz(3x+7y-22z)$$

۴۲- تفاضل مربع دوعبارت - ازاتحاد زیراستفاده می‌کنیم:

$$\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$$

مثال ۱ :

$$16a^4-9b^2=(4a^2)^2-(3b)^2=(4a^2-3b)(4a^2+3b)$$

مثال ۲ :

$$x^4-y^4=(x^2+y^2)(x^2-y^2)=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$$

۴۳- سه‌جمله‌ای مربع کامل - از دو اتحاد زیر که آنها را از چپ به راست می‌خوانیم استفاده می‌کنیم :

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

باید در نظر داشت که :

یک سه جمله‌ای درصورتی مربع کامل است‌که از مجموع مربعات دو جمله و دو برابر حاصل ضرب آنها تشکیل شده باشد .

مثال ۱ : $x^2+6x+9=(x+3)^2$

مثال ۲ : $9x^2-12xy+4y^2=(3x-2y)^2$

مثال ۳ : $-a^2+2ab-b^2=-(a^2-2ab+b^2)=-(a-b)^2$

مثال ۴ : $20x^2+60x+45=5(4x^2+12x+9)=5(2x+3)^2$

۴۴- سه جمله‌ای سادهٔ درجهٔ دوم - سه‌جمله‌ای سادهٔ درجهٔ دوم یعنی یک سه جمله‌ای که ضریب جملهٔ درجهٔ دوم آن یک باشد ، درصورت امکان برای تجزیهٔ چنین سه‌جمله‌ای از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم :

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

مثال ۱ : $x^2-5x+4=(x-4)(x-1)$

مثال ۲ : $x^2+mx-12m^2=(x-3m)(x+4m)$

۴۵- مجموع یا تفاضل مکعب دوعبارت- از دو اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

مثال ۱ : $3x^3-24=3(x^3-2^3)=3(x-2)(x^2+2x+4)$

مثال ۲ :

$$8x^3+27y^3=(2x)^3+(3y)^3=(2x+3y)[(2x)^2-(2x)(3y)+(3y)^2]$$
$$=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$$

مثال ۳ : $\text{۸}x^{\text{۳}}y^{\text{۳}}-\text{۱}=(\text{۲}xy)^{\text{۳}}-\text{۱}=(\text{۲}xy-\text{۱})(\text{۴}x^{\text{۲}}y^{\text{۲}}+\text{۲}xy+\text{۱})$

۶۴ – دسته‌بندی جمله‌ها – پیش‌از به کاربردن روشهای قبل‌ممکن است دسته‌بندی کردن جمله‌ها مفید واقع شود .

مثال ۱ :
$$x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}-z^{\text{۲}}+\text{۲}xy=(x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}+\text{۲}xy)-z^{\text{۲}}=(x+y)^{\text{۲}}-z^{\text{۲}}$$
$$=(x+y+z)(x+y-z)$$

مثال ۲ :
$$\text{۱}-a^{\text{۲}}+\text{۲}ab-b^{\text{۲}}=\text{۱}-(a^{\text{۲}}-\text{۲}ab+b^{\text{۲}})=\text{۱}-(a-b)^{\text{۲}}$$
$$=(\text{۱}+a-b)(\text{۱}-a+b)$$

مثال ۳ :
$$x^{\text{۴}}-\text{۲}x^{\text{۳}}+x-\text{۲}=(x^{\text{۴}}-\text{۲}x^{\text{۳}})+(x-\text{۲})$$
$$=x^{\text{۳}}(x-\text{۲})+(x-\text{۲})=(x-\text{۲})(x^{\text{۳}}+\text{۱})$$
$$=(x-\text{۲})(x+\text{۱})(x^{\text{۲}}-x+\text{۱})$$

مثال ۴ :
$$x^{\text{۳}}+\text{۴}x+\text{۵}=(x^{\text{۳}}+\text{۱})+(\text{۴}x+\text{۴})$$
$$=(x+\text{۱})(x^{\text{۲}}-x+\text{۱})+\text{۴}(x+\text{۱})$$
$$=(x+\text{۱})(x^{\text{۲}}-x+\text{۵})$$

مثال ۵ :
$$a^{\text{۳}}+\text{۳}a^{\text{۲}}-\text{۴}=(a^{\text{۳}}-a^{\text{۲}})+(\text{۴}a^{\text{۲}}-\text{۴})$$
$$=a^{\text{۲}}(a-\text{۱})+\text{۴}(a-\text{۱})(a+\text{۱})$$
$$=(a-\text{۱})(a^{\text{۲}}+\text{۴}a+\text{۴})=(a-\text{۱})(a+\text{۲})^{\text{۲}}$$

تمرین

چندجمله‌ایهای زیر را به حاصل‌ضرب عاملها تبدیل کنید :

۱ $a^{\text{۲}}b+ab$

۲ $\text{۵}acx+\text{۱۵}cx$

۳ $\text{۲۲}a^{\text{۳}}bc-\text{۳۳}a^{\text{۲}}c$

۴ $\text{۳}x^{\text{۴}}y^{\text{۴}}-\text{۷}x^{\text{۵}}y^{\text{۲}}$

۵ $-\text{۴}ab-\text{۲}b^{\text{۳}}c+ab^{\text{۲}}$

۶ $\text{۲}ba^{\text{۲}}+\text{۲}ab^{\text{۲}}+\text{۲}b^{\text{۳}}$

۷ $۳۵x^۳y - ۷۷x^۲y - ۶۳xy$

۸ $۷x^۳y^۳z - ۳xy^۴z^۳ - x^۳yz^۳$

۹ $x(a+b) - ۳y(a+b)$

۱۰ $ab(x^۲+y) + ab(x+y^۲)$

۱۱ $۴a(۳x-y)^۲ - ۶ax(۳x-y) + ۱۰ay(۳x-y)$

دوجمله‌ایهای زیر را به حاصل‌ضرب عاملها تبدیل کنید :

۱۲ $a^۲ - ۹$

۱۳ $x^۳y - xy^۳$

۱۴ $a^۴ - ۹b^۲$

۱۵ $۳۲a^۲ - ۲b^۴$

۱۶ $۴x^۲ - ۱۶a^۲$

۱۷ $a^۲x^۲ - ۸۱x^۲$

۱۸ $x^۴y^۲ - x^۲y^۴$

۱۹ $۱۵۰a^۶b^۳ - ۲۴a^۲b^۲$

۲۰ $x^۴ - ۸۱$

۲۱ $۳۲x^۴ - ۲a^۴$

۲۲ $۳x^۵ - ۴۸xy^۸$

در صورت امکان سه‌جمله‌ایهای زیر را به مربع یك دوجمله‌ای تبدیل کنید :

۲۳ $x^۲ + ۴x + ۴$

۲۴ $۴x^۲ - ۴x + ۱$

۲۵ $b^۴ + ۲b^۲ + ۱$

۲۶ $\frac{a^۲}{۱۶} - \frac{۳a}{۲} + ۹$

۲۷ $۹a^۴ - ۱۲a^۲ + ۴$

سه‌جمله‌ایهای سادهٔ زیر را به حاصل‌ضرب عاملها تجزیه کنید :

۲۸ $x^۲ - ۸x + ۱۲$

۲۹ $x^۲ - ۲۲x + ۸۵$

۳۰ $x^۲ + ۱۰x + ۱۶$

۳۱ $x^۲ - ۴x - ۳۲$

۳۲ $x^۲ + ۲۰x + ۱۹$

عبارات زیر را به حاصل‌ضرب عاملها تبدیل کنید :

۳۳ a^3+1

۳۴ $a^3b^3+y^3$

۳۵ $64+27x^3$

۳۶ $8a^3-1$

۳۷ $8-27a^3$

۳۸ $8x^3-27$

۳۹ $3x^3+24$

۴۰ $8a^3x^3-1$

۴۱ $(a-1)^3+8$

۴۲ $(2a-b)^3-8a^3$

۴۳ $a^6x^2-729x^8$

چندجمله‌ایهای زیر را به وسیلهٔ دسته‌بندی به حاصل‌ضرب عاملها تبدیل کنید :

۴۴ $a^2-2ab+b^2-1$

۴۵ $a^2-b^2+2bc-c^2$

۴۶ x^2-4y^2+4y-1

۴۷ $4x^2+2x-9y^2-3y$

۴۸ $b^2y-b^2+a^2y-a^2$

۴۹ a^3-2a^2+a-2

۵۰ ax^2-x^2-4a+4

سه‌جمله‌ایهای زیر را به حاصل‌ضرب عاملها تبدیل کنید :

۵۱ $2x^2+3x+1$

۵۲ $3x^2+5x+2$

۵۳ $5x^2+21x+4$

۵۴ $2x^2-5x-3$

۵۵ $5x^2-4x-1$

۵۶ $-9x^2+13x+10$

۵۷ $-15t^2+26t-8$

۵۸ $24-11a-28a^2$

ز ـ بزرگترین عامل مشترک و کوچکترین مضرب مشترک

۴۸ـ بزرگترین عامل مشترک یک‌جمله‌ایها و چندجمله‌ایها ـ تعریف دوجمله‌ایها و چندجمله‌ایهای اول را در شمارهٔ ۳۹ همین فصل دیدیم. ممکن‌است دو یا چند یک‌جمله‌ای یا چندجمله‌ای عامل یا عاملهای مشترکی داشته باشند. از این عاملهای مشترک آن را که مطابق با قاعدهٔ زیر به دست می‌آید بزرگترین عامل مشترک آن یک‌جمله‌ایها یا چندجمله‌ایها می‌نامند:

اولا هریک ازچندجمله‌ایها را به حاصل‌ضرب عاملهای اول (عددی وحرفی) تبدیل‌می‌کنیم.

ثانیاً هر یک از عاملهای اول (عددی و حرفی) مشترک را با کوچکترین نما اختیار کرده درهم ضرب می‌کنیم.

مثال ۱ : می‌خواهیم بزرگترین عامل مشترک یک‌جمله‌ایهای زیر را تعیین کنیم:

$$36a^2b^2c^2 \quad و \quad -24ab^3c^2 \quad و \quad 16a^2b^3cd$$

چون بزرگترین شمارندهٔ مشترک ضرایب ۱۶ و ۲۴ و ۳۶ عدد ۴ است مطابق با قاعدهٔ فوق بزرگترین عامل مشترک یک‌جمله‌ایهای مفروض عبارت است از: $4ab^2c$

تبصره ـ برای تعیین علامت بزرگترین عامل مشترک، اگر همهٔ ضرایب یک‌جمله‌ایها مثبت بودند علامت $+$ واگر همهٔ آنها منفی بودند علامت $-$ را اختیار می‌کنیم. اما اگر بعضی از ضرایب مثبت و بعضی منفی بودند علامت بزرگترین عامل مشترک اختیاری است. مثلا می‌توانیم عامل مشترک یک‌جمله‌ایهای مثال ۱ را $-4ab^2c$ اختیار کنیم.

مثال ۲ : می‌خواهیم بزرگترین عامل مشترک چندجمله‌ایهای زیر را که به عاملهای اول تجزیه شده‌اند پیدا کنیم:

$$A = 2^3 \times 3^2(x-y)^3(x+2y)^2$$
$$B = 2^2 \times 3^3(x-y)^2(x+2y)^3$$
$$C = 3^2(x-y)^2(x+2y)(x+y)$$

مطابق با قاعدهٔ فوق بزرگترین عامل مشترک مطلوب عبارت است از:

$$\Delta = 3^2(x-y)^2(x+2y)$$

۴۹ـ کوچکترین مضرب مشترک یک‌جمله‌ایها و چندجمله‌ایها ـ دو یا چند یک‌جمله‌ای یا چندجمله‌ای مضربهای مشترکی دارند. از این مضربهای مشترک آن را که مطابق با قاعدهٔ زیر به دست می‌آید کوچکترین مضرب مشترک آن یک‌جمله‌ایها یا چندجمله‌ایها می‌نامند.

اولا هر یک از چندجمله‌ایها را به حاصل‌ضرب عاملهای اول (عددی و حرفی) تبدیل می‌کنیم.

ثانیاً هر یك از عاملهای اول (عددی و حرفی) مشترك وغیرمشترك را با بزرگترین نماینده اختیار کرده درهم ضرب می‌کنیم .

مثال ۱ : کوچکترین مضرب مشترك یك‌جمله‌ایهای :

$$۵abc^{۲} \quad و \quad ۳ab^{۲} \quad و \quad ۲a^{۲}b^{۳}c$$

عبارت است از :

$$۲\times۳\times۵a^{۲}b^{۳}c^{۲}=۳۰a^{۲}b^{۳}c^{۲}$$

مثال ۲ : می‌خواهیم کوچکترین مضرب مشترك سه‌جمله‌ایهای زیر را تعیین کنیم :

$$A=x^{۲}-۱۱x+۲۸$$

$$B=۲x^{۲}-۲x-۸۴$$

$$C=(۵x-۳۵)(x+۸)$$

ابتدا هریك از سه‌جمله‌ایها را به حاصل‌ضرب عاملهای اول تبدیل می‌کنیم :

$$A=(x-۷)(x-۴)$$

$$B=۲(x-۷)(x+۶)$$

$$C=۵(x-۷)(x+۸)$$

کوچکترین مضرب مشترك مطلوب عبارت است از :

$$M=۱۰(x-۷)(x-۴)(x+۶)(x+۸)$$

تمرین

بزرگترین عامل مشترك و کوچکترین مضرب مشترك هردسته از عبارات زیر را تعیین کنید :

۱. $۱۵x^{۲}y^{۵} \;,\; ۲۷xy^{۳}$

۲. $۶a^{۲}bc \;,\; ۵ab^{۲}$

۳. $۱۲ab^{۳}c^{۴} \;,\; ۲۰b^{۲}c^{۳}$

۴. $۹ab^{۳}c^{۲} \;,\; ۱۵a^{۲}b^{۴}c^{۲} \;,\; ۱۰a^{۳}c^{۲}$

۵. $x(x+y) \;,\; ۲y(x+y)$

۶. $۲ab(a+b) \;,\; ۴b^{۲}(a+b)$

۷. $۳xy(x^{۲}-۴y^{۲}) \;,\; ۲y^{۲}(x-۲y)$

۸. $۶x^{۳}+۹x^{۲}y \;,\; ۴xy^{۲}+۶y^{۳}$

۹. $(x-۲)^{۳} \;,\; x^{۳}-۸$

۱۰. $۲۷a^{۳}-۱ \;,\; ۳a(۹a^{۲}-۱)$

۱۱. $۸y^{۳}-۱ \;,\; ۴y^{۳}+۲y^{۲}+y$

$$x^3+8x^2+15x \ , \ x^4+3x^3-10x^2 \qquad 12$$
$$x^2-2xy-15y^2 \ , \ x^2+7xy+12y^2 \qquad 13$$

ح ـ کسرهای جبری گویا

تعریف زیر را یادآوری می‌کنیم.

۵۰ ـ کسر جبری گویا ـ اگر A و B دوچند جمله‌ای باشند عبارت جبری $\frac{A}{B}$ را، که درآن همیشه $B\neq 0$ فرض می‌شود، کسرجبری گویا یا به‌طور خلاصه کسرگویا می‌نامند.

A صورت کسر و B مخرج کسر نامیده می‌شود. در صفحات بعد، مخرج همهٔ کسرها مخالف صفر فرض شده است.

مثال: عبارت جبری $P=\frac{4x^2-5x+1}{2x-3}$ یک‌کسرجبری گویاست. چون می‌دانیم‌که تقسیم بر صفر معنی ندارد، این‌کسر فقط وقتی معین است‌که مخرج آن صفر نباشد. پس‌کسر فوق به‌ازای‌جمیع مقادیر x معین‌است‌مگر به‌ازای $x=\frac{3}{2}$ که مخرج آن را صفر می‌کند.

۵۱ـ قاعده‌های محاسبه با کسرهای گویاـ به ازای هرعـدد حقیقی که به جای x بگذاریم (به استثنای $x=\frac{3}{2}$) مقدار عددی کسر $\frac{4x^2-5x+1}{2x-3}$ یک عدد حقیقی است که عبارت است ازخارج قسمت تقسیم صورت کسر برمخرج آن. بنابراین، قاعده‌های محاسبه‌در کسری گویا همان قاعده‌های محاسبه درعددهای حقیقی هستند بااین تفاوت که باید مقادیری از حروف که مخرج کسرگویا را صفر می‌کنند کنار بگذاریم.

۵۲ـ ساده کردن کسر گویا ـ اگر صورت و مخرج کسر گویـا دارای عامـل مشترکی باشند می‌توانیم آنها را برآن عامل مشترک (که مخالف با صفرفرض می‌شود) تقسیم کنیم. این عمل را ساده کردن کسر گویا می‌نامند. اگر کسرگویایی را نتوان ساده کرد آن را کسر گویای تحویل‌ناپذیر می‌خوانند.

برای ساده‌کردن‌کسر گویا باید صورت ومخرج را به‌حاصل‌ضرب عاملهای اول‌تبدیل‌کرد.

توجه کنید: در ضمن محاسبه فرض می‌کنیم که فقط مقادیری به حروف نسبت داده می‌شوند که مخرج کسر گویا را صفر نمی‌کنند.

مثال ۱:
$$\frac{2a^3xy^2}{3x^4y^2}=\frac{2a^3\times xy^2}{3x^3\times xy^2}=\frac{2a^3}{3x^3}$$

مثال ۲: $\frac{3x^2-6x}{x^2-4}=\frac{3x(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{3x}{x+2}$

مثال ۳: $\frac{3x^2-27}{x+3}=\frac{3(x+3)(x-3)}{x+3}=3(x-3)$

در این مثال دیده می‌شود که ممکن است یک کسر گویا پس‌از ساده شدن به یک چند جمله‌ای تبدیل شود.

۵۳- تحویل به مخرج مشترک- برای تحویل به‌مخرج مشترک چند کسر گویا پس‌از ساده کردن آنها مخرجها را به‌حاصل‌ضرب عاملهای اول تجزیه‌کرده کوچکترین مضرب مشترک مخرجها رامخرج مشترک قرارمی‌دهیم. سپس مخرج مشترک را برهریک از مخرجها تقسیم کرده خارج‌قسمت را در صورت همان کسر ضرب می کنیم.

مثال ۱ : برای آن‌که کسرهای $\frac{1}{2a}$ و $\frac{3a^2}{b}$ و $\frac{ac}{2b^2}$ را به مخرج مشترک تحویل کنیم ملاحظه می‌کنیم که کوچکترین مضرب مشترک مخرجها $2ab^2$ است و داریم:

$$\frac{ac}{2b^2}=\frac{a^2c}{2ab^2}\ ,\ \frac{3a^2}{b}=\frac{6a^3b}{2ab^2}\ ,\ \frac{1}{2a}=\frac{b^2}{2ab^2}$$

مثال ۲ : می‌خواهیم کسرهای زیر را به مخرج مشترک تحویل کنیم:

$$C=\frac{2x}{x^3}\ ,\ B=\frac{3x+3}{x^3+2x^2+x}\ ,\ A=\frac{x^2-x}{x^2-1}$$

چون $C=\frac{2x}{x^3}\ ,\ B=\frac{3(x+1)}{x(x+1)^2}\ ,\ A=\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

پس‌از ساده شدن،این کسرها به صورت زیر در می‌آیند:

$$C=\frac{2}{x^2}\ ,\ B=\frac{3}{x(x+1)}\ ,\ A=\frac{x}{x+1}$$

اکنون مخرج مشترک می گیریم. حاصل می‌شود:

$$C=\frac{2(x+1)}{x^2(x+1)}\ ,\ B=\frac{3x}{x^2(x+1)}\ ,\ A=\frac{x^3}{x^2(x+1)}$$

۵۴- جمع و تفریق کسرهای گویا - به طورکلی برای محاسبهٔ مجموع جبری دو یا چند کسر گویا:

یک - صورت و مخرج هر کسر را به حاصل‌ضرب عاملهای اول تبدیل می کنیم.

دو - در صورت امکان کسرها را ساده می‌کنیم.

سه ـ مخرج مشترك می‌گیریم .

چهار ـ مجموع جبری صورتها را صورت و مخرج مشترك را مخرج قرار می‌دهیم.

پنج ـ در صورت امکان کسر حاصل را ساده می‌کنیم .

مثال ۱ : می‌خواهیم مجموع جبری زیر را حساب کنیم :

$$P=\frac{۱}{x}+\frac{۳x}{x+۱}-\frac{۱}{x(x+۱)}$$

مخرج مشترك عبارت‌است از $x(x+۱)$ و داریم :

$$P=\frac{x+۱}{x(x+۱)}+\frac{۳x^{۲}}{x(x+۱)}-\frac{۱}{x(x+۱)}$$

$$=\frac{x+۱+۳x^{۲}-۱}{x(x+۱)}=\frac{۳x^{۲}+x}{x(x+۱)}=\frac{۳x+۱}{x+۱}$$

مثال ۲ : محاسبهٔ مجموع جبری :

$$M=\frac{۲x^{۳}-x^{۲}}{x^{۴}+x^{۳}}-\frac{x^{۲}-۲x+۱}{x^{۲}-x}+\frac{x-۱}{x^{۲}-۱}$$

به ترتیب حاصل می‌شود :

$$M=\frac{x^{۲}(۲x-۱)}{x^{۳}(x+۱)}-\frac{(x-۱)^{۲}}{x(x-۱)}+\frac{x-۱}{(x+۱)(x-۱)}$$

$$=\frac{۲x-۱}{x(x+۱)}-\frac{x-۱}{x}+\frac{۱}{x+۱}$$

$$=\frac{۲x-۱}{x(x+۱)}-\frac{(x-۱)(x+۱)}{x(x+۱)}+\frac{x}{x(x+۱)}$$

$$=\frac{۲x-۱-(x^{۲}-۱)+x}{x(x+۱)}$$

$$=\frac{۳x-x^{۲}}{x(x+۱)}=\frac{x(۳-x)}{x(x+۱)}=\frac{۳-x}{x+۱}$$

۵۵ـ ضرب و تقسیم کسرهای گویا ـ مانند ضرب و تقسیم کسرهای عددی قاعده‌های زیر را به کار می‌بریم :

$$(۱)\quad \frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}\qquad و\qquad (۲)\quad \frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$$

در حالت خاص :

$$\frac{A}{B}\times\frac{B}{A}=۱\qquad و\qquad \frac{A}{B}=A\times\frac{۱}{B}$$

کسر مرکب : گاهی اوقات (۱) را به صورت $\dfrac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\dfrac{A\cdot D}{B\cdot C}$ نمایش داده آن را کسر مرکب می‌گوئیم . در ساده کردن کسر مرکب صورت و مخرج کسر اصلی را ساده کرده ، ساده شده‌ها را طبق (۱) برهم تقسیم می‌کنیم .

مثال ۱ :

$$\frac{a}{2}\times\frac{a+1}{6}\times\frac{4a}{a^2-1}=\frac{a(a+1)\times 4a}{2\times 6(a^2-1)}=\frac{a^2}{3(a-1)}$$

مثال ۲ :

$$\frac{x}{x^2-1}\times\frac{x^2-x}{x^3}\times\frac{2x+1}{x^2+1}=\frac{x(x^2-x)(2x+1)}{(x^2-1)x^3(x^2+1)}$$

$$=\frac{x^2(x-1)(2x+1)}{x^3(x+1)(x-1)(x^2+1)}=\frac{2x+1}{x(x+1)(x^2+1)}$$

مثال ۳ :

$$\frac{a^2}{a^2-1}:\frac{a+2}{a-1}=\frac{a^2}{a^2-1}\times\frac{a-1}{a+2}=\frac{a^2(a-1)}{(a^2-1)(a+2)}$$

$$=\frac{a^2(a-1)}{(a+1)(a-1)(a+2)}=\frac{a^2}{(a+1)(a+2)}$$

مثال ۴ :

$$\frac{2x-\frac{1}{2x}}{1-\frac{1}{8x^3}}=\frac{\frac{2x^2-1}{2x}}{\frac{8x^3-1}{8x^3}}=\frac{8x^3(4x^2-1)}{2x(8x^3-1)}=\frac{4x^2(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)(4x^2+1+4x)}$$

تمرین

(در تمرینهای زیر مخرجهای کسرها مخالف صفر فرض می‌شوند)

کسرهای زیر را ساده کنید:

۱ $\dfrac{14b^4x\times 5ay}{15a^2x\times 7b^3y}$

۲ $\dfrac{a-3}{2a^2-18}$

۳ $\dfrac{a^3+b^3}{(a-b)^2+ab}$

۴ $\frac{x^۲-۴x+۴}{x^۲-۴}$

۵ $\frac{۴a^۲+۱۲a+۹}{۴a^۲-۹}$

۶ $\frac{۱۲ax^۲+۳ax}{۸x^۲+۲۲x+۵}$

۷ $\frac{x^۲-۷x-۸}{x^۳+۳x^۲+۲x}$

۸ $\frac{۸x^۶+۲۷y^۶}{۸x^۴-۱۸y^۴}$

۹ $\frac{۱۶x^۳-۱۲۸}{۸x^۲-۲۴x+۱۶}$

۱۰ $\frac{a^۶-b^۶}{(a+b)^۲(a^۳-b^۳)}$

اعمال زیر را انجام داده نتیجه را ساده کنید:

۱۱ $\frac{x+۳}{۳}+\frac{x-۲}{۲}$

۱۲ $\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}$

۱۳ $\frac{۱}{a+۲}+\frac{۱}{a+۴}$

۱۴ $\frac{۲}{x-۲}-\frac{۴}{x^۲-۴}$

۱۵ $\frac{a+۳}{a+۴}-\frac{a+۱}{a+۲}$

۱۶ $\frac{x-۳}{x+۳}-\frac{x+۳}{x-۳}$

۱۷ $\frac{a}{x-a}-\frac{a^۲}{x^۲-a^۲}$

۱۸ $\frac{۲x-۳a}{x-۲a}-\frac{۲x-a}{x-a}$

۱۹ $\frac{۳x^۲}{x^۲-y^۲}-\frac{۲x^۲}{x^۲+xy}$

۲۰ $\frac{a+۱}{x^۲-a^۲}+\frac{a-۱}{(x-a)^۲}$

۲۱ $1+x+x^2+\frac{x^3}{1-x}$

۲۲ $1-x+x^2+\frac{x^3}{1+x}$

۲۳ $1-2x+x^2+\frac{1-x^4}{1+2x+x^2}$

اعمال زیر را انجام دهید و حاصل را خلاصه کنید :

۲۴ $\frac{x-2y}{xy}+\frac{3y-a}{ay}-\frac{3x-2a}{ax}$

۲۵ $\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}+\frac{2x}{x^2-y^2}$

۲۶ $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}-\frac{2ab}{a^2-b^2}$

۲۷ $\frac{a+8}{a-1}+\frac{a+4}{a+1}-\frac{2(4a+1)}{a^2-1}$

۲۸ $\frac{a+5}{a-1}-\frac{6}{a^2+a+1}-\frac{6(a^2+2)}{a^3-1}$

۲۹ $\frac{a^2+ab}{a^2-ab}-\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^2b-b^3}$

۳۰ $\frac{ax^2+b}{2x-1}+\frac{2(bx+ax^2)}{1-4x^2}-\frac{ax^2-b}{2x+1}$

۳۱ $\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-x-2}+\frac{2}{x^2-1}$

۳۲ $\frac{b}{a(a^2-b^2)}+\frac{a}{b(a^2+b^2)}+\frac{a^4+b^4}{ab(b^4-a^4)}-\frac{a^6}{b^8-a^8}$

ضربهای زیر را انجام دهید و نتیجه را ساده کنید :

۳۳ $\frac{a}{6b}\times\frac{3b}{4}\times\frac{2b}{5}$

۳۴ $\frac{4x^2-6xy}{5x}\times\frac{10x}{6x-9y}$

۳۵ $\frac{a+x}{(m+n)^3}\times\frac{x^2-y^2}{12}\times\frac{(m+n)^2}{m-n}\times\frac{6(m^2-n^2)}{x+y}$

۳۶ $\dfrac{x^3+y^3}{x^4-y^4}\times\dfrac{x^2y+y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}\times\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}$

۳۷ $\left(\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}\right)\left(\dfrac{3}{4x}+\dfrac{x}{4}-x\right)$

۳۸ $\left(x+2a-\dfrac{a^2}{2x+3a}\right)\left(2x-a-\dfrac{3a^2}{x+a}\right)$

۳۹ $\left(b+\dfrac{ab}{b-a}\right)\left(b-\dfrac{ab}{a+b}\right)\times\dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$

تقسیمهای زیر را انجام دهید و حاصل را ساده کنید :

۴۰ $\dfrac{a^2-b^2}{a}:\dfrac{a+b}{a-b}$

۴۱ $\dfrac{4x^2-9a^4}{ab-a^2}:\dfrac{2x-3a^2}{a^3b-a^4}$

۴۲ $\dfrac{20x-25}{3b-4}:\dfrac{4a^2x-5a^2}{9b^2-16}$

۴۳ $\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{x^2}\right):\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)$

۴۴ $\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right):\left(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{a}{x}\right)$

۴۵ $\left(1+\dfrac{x-a}{x+a}\right):\left(\dfrac{x+a}{x-a}-1\right)$

۴۶ $(2x^2-x-6):\left(\dfrac{4}{x^2}-1\right)$

اعمال زیر را انجام دهید و نتیجه را هرچه ممکن است ساده کنید :

۴۷ $$\dfrac{\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{x}{1-x}}{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{x}{1+x}}$$

۴۸ $$\dfrac{\dfrac{x-y}{y-a}-\dfrac{y-a}{x-y}}{\dfrac{x-y-1}{x-y}-\dfrac{y-a-1}{y-a}}$$

$$\frac{1}{a-\cfrac{a^2-1}{a+\cfrac{1}{a-1}}}$$ ۴۹

$$\frac{\frac{a}{a+1}+\frac{a}{a-1}}{2-\frac{a-2}{1-a}}\times\frac{1-\frac{3}{a+1}}{a+\frac{a(a-1)}{a+1}}$$ ۵۰

ط ـ توانهای منفی و کسری

۵۶ـ اگر a و b اعداد حقیقی و m و n عددهای طبیعی باشد :

	$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{(n\text{ عامل})}$	(تعریف)
	$a^1=a$	(تعریف)
$a\neq 0$	$a^0=1$	(تعریف)
	$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	(۱)
	$(a^m)^n=a^{mn}$	(۲)
اگر $m\geqslant n$	$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$	(۳)
اگر $m<n$ و $a\neq 0$	$\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}$	
	$(ab)^m=a^m\times b^m$	(۴)
اگر $b\neq 0$	$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$	(۵)

ملاحظه می‌کنیم که چون فقط توانهای درست حسابی را تعریف کرده‌ایم در دستور شمارهٔ (۳) ناچار شده‌ایم که برحسب آن‌که m بزرگتر از n یا کوچکتر از آن باشد دوحالت تمیز دهیم . اکنون می‌خواهیم مفهوم توان را بسط داده این استثنا را از بین ببریم .

۵۷ـ توان منفی ـ قسمت اول دستور (۳) شمارهٔ قبل یعنی $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ فقط در صورتی معنی دارد که m بزرگتر یا مساوی n باشد . زیرا اگر m کوچکتر از n باشد مثلا داریم

$\frac{a^3}{a^5}=a^{3-5}=a^{-2}$ اما a^{-2} طبق تعریفی که برای توانهای طبیعی کرده‌ایم معنی ندارد.

از طرف دیگر می‌دانیم که $\frac{a^3}{a^5}=\frac{1}{a^2}$ پس اگر تعریف کنیم که a^{-2} مساوی با $\frac{1}{a^2}$ باشد دستور فوق در این مورد نیز معنی پیدا می‌کند و ناچار نخواهیم بود دو حالت تمیز دهیم :

تعریف ـ ۱ اگر $n\in N$, $x\in R$, $x\neq 0$ برحسب تعریف :

$$x^{-n}=\frac{1}{x^n} \qquad (۶)$$

چند مثال : $3^{-2}=\frac{1}{3^2}$ و $(\frac{2}{3})^{-2}=\frac{1}{(\frac{2}{3})^2}=(\frac{3}{2})^2$

و $x^{-3}=\frac{1}{x^3}$ و $2x^{-5}=2\times\frac{1}{x^5}=\frac{2}{x^5}$

و $(2x)^{-5}=\frac{1}{(2x)^5}=\frac{1}{32x^5}$ و $\frac{x^3}{x^7}=x^{3-7}=x^{-4}=\frac{1}{x^4}$

توجه کنید که $2x^{-3}$ با $(2x)^{-3}$ فرق دارد (چرا؟) .

۵۸ـ ریشهٔ nاُم یك عدد حقیقی ـ با تعریفهایی که برای توانهای درست ومثبت و منفی و صفر کردیم مثلا $x^{\frac{1}{2}}$ معنی ندارد . امـا می‌توانیم برای آن معنی مناسبی اختیار کنیم. برای این کار ابتدا ریشهٔ nام یك عدد را تعریف می‌کنیم :

تعریف ـ ۱ اگر n عددی درست و مثبت $(n\in N)$ و a و b عددهای حقیقی باشند $(a,b\in R)$ به قسمی که داشته باشیم :

$$a^n=b$$

می‌گوییم که a یك ریشهٔ nام عدد b است .

اگر b مثبت باشد فقط یك عدد حقیقی مثبت a می‌توان یافت به قسمی که $a^n=b$ ، این عدد را بـه شکل $\sqrt[n]{b}$ می‌نویسیم و آن را ریشهٔ n ام اصلی b می‌نامیم . نماد $\sqrt{\ }$ رادیکال و عدد n عدد فرجهٔ رادیکال نامیده می‌شود. وقتی کـه b مثبت و n زوج است برای $a^n=b$ دو جواب قرینه بدست می‌آید که ریشهٔ n ام اصلی آن همان $\sqrt[n]{b}$ یعنی جواب مثبت آن است و جواب منفی آن را با $-\sqrt[n]{b}$ نمایش می‌دهیم .

مثلا $\sqrt[4]{16}$ عبارت است از ۲ زیرا $16=2^4$ و ۲ ریشهٔ چهارم اصلی ۱۶ است .

اما $(-۲)^۴$ نیز مساوی با ۱۶ است پس ۲ — نیز ریشهٔ چهارم ۱۶ می‌باشد . اما این ریشه، ریشهٔ اصلی نیست و آن‌را به صورت $-\sqrt[۴]{۱۶}$ نشان می‌دهیم.

اگر b منفی و n زوج باشد ، b ریشهٔ n ام حقیقی ندارد ، اما اگر b منفی و n فرد باشد b فقط یك ریشهٔ n ام منفی دارد. دراین‌صورت این‌ریشهٔ منفی را ریشهٔ nام **اصلی** b می‌نامیم و آن را به شکل $\sqrt[n]{b}$ می‌نویسیم .

$\sqrt[n]{b}$ بنام ریشهٔ nام اصلی را خوانده می‌شود

مثلا $\sqrt[۳]{-۲۷}$ عبارت‌است از ۳— زیرا $(-۳)^۳ = -۲۷$ و ۳— ریشهٔ سوم اصلی ۲۷ — است .

اعداد منفی ریشهٔ زوج حقیقی ندارند .

قرارداد : هرگاه فرجه رادیکال ۲ باشد ازنوشتن‌آن خودداری می‌کنیم . مثلا بجای $\sqrt[۲]{۷}$ می‌نویسیم $\sqrt{۷}$.

۵۹– توان کسری ـ گفتیم که با تعریفهایی که برای توانهای درست مثبت و منفی و صفر کرده‌ایم مثلا $x^{\frac{۱}{۲}}$ معنی نـدارد و بنابـراین می‌توانیم معنی مناسبی برای آن اختیار کنیم . اگربخواهیم دستور $(a^m)^n = a^{mn}$ که درآن m و n اعداد طبیعی می‌باشند دراین مورد نیزمعنی داشته باشد باید داشته باشیم :

$$(a^{\frac{۱}{۳}})^۳ = a^{\frac{۳}{۳}} = a^۱ = a$$

یعنی باید $a^{\frac{۱}{۳}}$ عددی باشد که توان سوم آن مساوی با a شود پس $a^{\frac{۱}{۳}}$ را ریشهٔ سوم اصلی a می‌نامیم . به طورکلی تا آنجا که تعریف شده باشد داریم :

$$(a \in R\ ,\ n \in N) :\ a^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad (۷)$$

همچنین اگر بخواهیم که مثلا $a^{\frac{۲}{۵}}$ معنی داشته باشد و دستور $(a^m)^n = a^{mn}$ درمورد آن درست باشد باید داشته باشیم :

$$a^{\frac{۲}{۵}} = (a^{\frac{۱}{۵}})^۲ = (\sqrt[۵]{a})^۲$$

و نیز

$$a^{\frac{۲}{۵}} = (a^۲)^{\frac{۱}{۵}} = \sqrt[۵]{a^۲}$$

پس به طور کلی توان کسری $a^{\frac{p}{q}}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

تعریف ـ اگر p عددی درست، q عددی درست و مثبت، a مثبت باشد:

$$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^{p}}=(\sqrt[q]{a})^{p} \qquad (8)$$

ثابت می‌کنند و ما قبول می‌کنیم که دستورهای پنجگانهٔ شمارهٔ ۵۶ همین فصل در مورد توای کسری نیز درست هستند.

مثال ۱ : $(x^{6})^{\frac{2}{3}}=x^{6\times\frac{2}{3}}=x^{4}$

مثال ۲ : $(27)^{-\frac{2}{3}}=(27^{\frac{1}{3}})^{-2}=(\sqrt[3]{27})^{-2}=(3)^{-2}=\frac{1}{3^{2}}=\frac{1}{9}$

مثال ۳ : $a^{\frac{3}{7}}\times a^{\frac{5}{2}}=a^{\frac{3}{7}+\frac{5}{2}}=a^{\frac{41}{14}}$

مثال ۴ : $x^{\frac{3}{5}}\div x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{3}{5}-\frac{2}{3}}=x^{-\frac{1}{15}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{15}}}$

تمرین

مقادیر زیر را حساب کنید:

۱ -4^{-2}

۲ $(-1)^{-3}$

۳ $(-3)^{-3}$

۴ $3x^{0}$

۵ $3^{0}x$

۶ -10^{-2}

۷ $3^{2}\times 4^{-3}$

۸ $2^{-2}\times 4^{3}$

۹ $2^{-3}\times 4^{-2}\times 8^{2}$

۱۰ $\dfrac{-5}{8^{-1}}$

۱۱ $\dfrac{4^{-2}}{5^{0}}$

۱۲ $\dfrac{6}{2^{-3}+3^{-2}}$

۱۳ $(3a^{-2})^{-2}$

۱۴ $-5^{2}+(-5)^{2}$

عبارات زیر را تغییر شکل داده طوری بنویسیدکه در آنها نمای منفی وجود نداشته باشد و نتیجه را ساده کنید :

۱۵ $(a^{-2})^{-3}$

۱۶ $(a^{2}a^{-3})^{-2}$

۱۷ $(3a^{-2})^{-2}$

۱۸ $a+a^{-1}$

۱۹ $\dfrac{2x^{-1}}{3b^{2}}$

۲۰ $\dfrac{3ab^{-2}}{2a^{-3}b}$

۲۱ $\dfrac{2x^{2}y^{2}}{7x^{-2}y^{-1}z^{-3}}$

۲۲ $\dfrac{x}{x^{-2}+x^{-3}}$

۲۳ $\dfrac{5}{(x+y)^{-1}}$

۲۴ $\dfrac{5}{x^{-1}+y^{-1}}$

۲۵ $(3x-2b^{2})^{2}$

۲۶ $(1+x^{-1})(1+x^{-2})$

۲۷ $(5+3x^{-1})(5-3x^{-2})$

۲۸ $\dfrac{(a^{2}b^{-2}c^{3})^{4}}{(a^{2}b^{2})^{3}(a^{-1}b^{-1})^{-1}}$

۲۹ ـ ریشهٔ دوم اصلی هر یك از اعداد زیر را بنویسید :

$25 \quad , \quad 81 \quad , \quad 17 \quad , \quad 0/01 \quad , \quad \frac{1}{36} \quad , \quad \frac{64}{81}$

۳۰ ـ هریك از اعداد زیر را با به‌کاربردن توانهای مثبت کسری بنویسید :

$\sqrt[3]{2} \quad , \quad \sqrt[2]{7^{2}} \quad , \quad \sqrt[4]{-7} \quad , \quad \sqrt[2]{7^{-2}} \quad , \quad -\sqrt[3]{-8} \quad , \quad \sqrt[5]{a^{-4}}$

۳۱ ـ هریك از توانهای کسری زیر را به صورت رادیکال بنویسید :

$5^{\frac{3}{5}} \quad , \quad (-2a)^{\frac{2}{3}} \quad , \quad (10)^{-\frac{2}{3}} \quad , \quad (\frac{1}{10})^{-\frac{3}{4}} \quad , \quad (a^{0})^{-\frac{1}{2}}$

اعداد زیر را حساب کنید :

۳۲ $8^{-\frac{2}{3}}$

۳۳ $(\frac{4}{9})^{\frac{3}{2}}$

۳۴ $(\frac{1}{16})^{-\frac{3}{4}}$

۳۵ $(81)^{0/25}$

۳۶ $9^{-\frac{3}{2}} \times 8^{\frac{2}{3}}$

۳۷ $\left[(16)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{2}{3}}$

۳۸ $(8^{\frac{1}{2}} \times 9^{\frac{1}{3}})^{6}$

۳۹ $5(125)^{-\frac{1}{3}}$

۴۰ $8^{\frac{2}{3}} \times 8^{-\frac{1}{3}}$

۴۱ $8^{-\frac{2}{3}} : 8^{\frac{1}{3}}$

۴۲ $-(-27)^{-\frac{2}{3}}$

ی - رادیکالها

۶۰ - در شمارهٔ ۵۸ همین فصل دیدیم که مقصود از عبارتی به صورت $\sqrt[n]{a}$ ریشهٔ nام اصلی a است . عدد n را که اصولا درست و مثبت (طبیعی) فرض می‌شود عدد فرجهٔ رادیکال یا رتبهٔ رادیکال و عدد a را عدد زیر رادیکال می‌نامند .

توجه: برای احتراز از بعضی مشکلات دراین بخش ازکتاب همهٔ حروف زیر رادیکال را نمایندهٔ اعداد حقیقی مثبت فرض می‌کنیم ، مگر در مواردی که به صراحت خلاف این فرض را تذکر دهیم.

۶۱ - چون مطابق با آنچه در شمارهٔ ۵۹ همین فصل گفتیم[1] :

$$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$$

پس دستورهای محاسبه با رادیکالها از دستورهای مربوط به توانهای‌کسری نتیجه می‌شود که اینک آنها را ذکر می‌کنیم :

(۱) $$\boxed{(\sqrt[n]{a})^n=a}$$ (تعریف)

مثال : $(\sqrt[۳]{۶})^۳=۶$

(۲) $$\boxed{\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}}$$

مثال : $\sqrt[۳]{۵۴}=\sqrt[۳]{۲۷\times۲}=\sqrt[۳]{۲۷}\times\sqrt[۳]{۲}=۳\sqrt[۳]{۲}$

(۳) $$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$ $(b\neq۰)$

۱ــ ازاین‌جهت‌درجه a را در $\sqrt[n]{a}$ برابر $\frac{1}{n}$ می‌گیرند.

مثال : $\sqrt[5]{\frac{5}{32}}=\frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{32}}=\frac{\sqrt[5]{5}}{2}$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a} \qquad (4)$$

مثال : $\sqrt[3]{\sqrt{5}}=\sqrt[6]{5}$

و در شمارهٔ ۵۹ همین فصل دیدیم که[1] :

$$\sqrt[q]{a^p}=(\sqrt[q]{a})^p=a^{\frac{p}{q}}$$

مثال : $\sqrt[3]{(27)^4}=(\sqrt[3]{27})^4=3^4=81$

۶۲ ـ همیشه برای محاسبه با رادیکالها می‌توان آنها را به صورت توانهای کسری نوشت و دستورهای مربوط به توانهای کسری را به کار برد . با این حال گاهی بهتر است که محاسبات را با خود رادیکالها (بدون نوشتن آنها با توانهای کسری) انجام دهیم . در این صورت گاهی لازم می‌شود که شکل ظاهری رادیکالها را تغییر داده آنها را به شکل مناسب‌تری در آوریم این اعمال بنام اعمال روی رادیکالها خوانده می‌شود . اینك قاعده های اعمال روی رادیکالها را که می‌توان برای تغییر شکل دادن رادیکالها به‌کاربرد بیان می‌کنیم و برای این کار ابتدا توان کامل n ام یك عدد یا یك جمله را تعریف می‌کنیم .

۶۳ ـ توان n ام کامل ـ یك عدد گویا را توان n ام کامل می‌نامند هرگاه آن عدد مساوی با توان nام یك عددگویای دیگر باشد .

مثلا $\frac{4}{9}$ توان دوم کامل است. همچنین $(-\frac{27}{64})$ توان سوم کامل است (چرا؟) .

همچنین یك جمله را توان کامل nام می‌نامند هرگاه مساوی با توان nام یك جملهٔ

۱ـ از این جهت درجهٔ a در $\sqrt[q]{a^p}$ را برابر $\frac{p}{q}$ می‌گیرند .

دیگر باشد .

مثلاً $8a^6b^9$ توان سوم کامل است ، زیرا مساوی است با $(2a^2b^3)^3$

همچنین $a^2+2ab+b^2$ توان دوم کامل است زیرا برابر $(a+b)^2$ است.

۶۴ ـ شکل ظاهری یك رادیکال را بدون تغییر مقدار آن ، می‌توان به راههای زیر تغییر داد:

الف ـ بیرون‌آوردن یك توان کامل از زیر رادیکال .

مثال ۱ : $\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{2^3\times 4}=\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{4}=2\sqrt[3]{4}$

مثال ۲ : $\sqrt{8x^5y^7}=\sqrt{(4x^4y^6)(2xy)}=2x^2y^3\sqrt{2xy}$

به طور کلی :

$$\sqrt[k]{a^k b}=a\sqrt[k]{b} \qquad \text{(الف)}$$

یعنی : می‌توان توان کاملی را که نمایندهٔ آن مساوی با عدد فرجهٔ رادیکال باشد از زیر رادیکال بیرون آورد .

ب ـ کوچك کردن عدد فرجهٔ رادیکال .

مثال ۱ : $\sqrt[4]{64}=\sqrt[4]{2^6}=2^{\frac{6}{4}}=2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2^3}=\sqrt{8}$

مثال ۲ : $\sqrt[6]{25x^6}=\sqrt[6]{5^2}\times\sqrt[6]{x^6}=5^{\frac{2}{6}}x=5^{\frac{1}{3}}x=x\sqrt[3]{5}$

به طور کلی :

$$\sqrt[km]{a^m}=\sqrt[k]{a} \qquad \text{(ب)}$$

یعنی : می‌توان عدد فرجهٔ یك رادیکال و توان مقدار زیر رادیکال را در یك عدد طبیعی ضرب ویا بر یك عدد طبیعی تقسیم کرد. بشرط آنکه فرجهٔ رادیکال عدد طبیعی درآید.

تبصرهٔ بسیار مهم ـ توجه کنید که :

$$\sqrt[4]{(-4)^2}=\sqrt[4]{16}=2$$

اما نمی‌توان نوشت :

$$\sqrt[4]{(-4)^2}=(-4)^{\frac{2}{4}}=(-4)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-4}$$

که تعریف نشده است .

ج ـ بیرون آوردن مخرج کسر از زیر رادیکال

مثال ۱ : اگربخواهیم در $\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$ عدد ۲ را از زیررادیکال بیرون‌آوریم صورت ومخرج کسر زیر رادیکال را در عددی ضرب می‌کنیم که مخرج توان سوم کامل شود :

$$\sqrt[3]{\frac{9}{2}}=\sqrt[3]{\frac{9\times 2^2}{2\times 2^2}}=\sqrt[3]{\frac{36}{2^3}}=\frac{\sqrt[3]{36}}{2}$$

مثال ۲ : برای گویا کردن مخرج $\sqrt[4]{\frac{7a^2y^3}{8b^6x^3}}$ صورت و مخرج کسر زیر رادیکال را در $2b^2x$ ضرب می‌کنیم تا مخرج توان چهارم کامل شود :

$$\sqrt[4]{\frac{7a^2y^3}{8b^6x^3}}=\sqrt[4]{\frac{7a^2y^3\times 2b^2x}{8b^6x^3\times 2b^2x}}=\sqrt[4]{\frac{14a^2b^2xy^3}{16b^8x^4}}=\frac{\sqrt[4]{14a^2b^2xy^3}}{2b^2x}$$

به طورکلی :

$$\sqrt[k]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[k]{ab^{k-1}}}{b} \qquad (ج)$$

یعنی برای گویا کردن مخرج کسری که زیر رادیکال باشد باید **مخرج را به توان** کامل فرجه تبدیل کرد .

۶۵ ـ ساده‌ترین شکل یك رادیکال ـ یك رادیکال را در صورتی دارای ساده‌ترین شکل می‌نامند که دارای شرایط زیر باشد :

الف ـ همهٔ توانهای n ام کامل از زیر رادیکال خارج شده باشند (n عدد فرجهٔ رادیکال است) .

ب ـ عدد فرجهٔ رادیکال هرچه ممکن است کوچك شده باشد .

ج ـ زیر رادیکال کسر وجود نداشته باشد .

مثال ۱ : ساده‌ترین شکل $\sqrt{18a^3b^5}$ عبارت است از $3ab^2\sqrt{2ab}$.

مثال ۲ : ساده‌ترین شکل $\sqrt[3]{-5x^7}$ عبارت است از $-x^2\sqrt[3]{5x}$.

مثال ۳ : ساده‌ترین شکل $\sqrt[3]{\frac{5}{2x^4}}$ عبارت است از $\frac{1}{2x}\sqrt[3]{20x}$ (چرا؟) .

مثال ۴ : ساده‌ترین شکل $\sqrt[3]{\frac{2a}{b^2}}$ عبارت است از $\frac{1}{b}\sqrt[3]{2ab}$ (چرا؟) .

۶۶ـ رادیکالهای متشابه ـ دو یا چند رادیکال را که به ساده‌ترین شکل خود نوشته شده باشند متشابه می‌نامند هرگاه عدد فرجهٔ آنها باهم و مقدارهای زیر رادیکال نیز باهم مساوی باشند .

مثلا $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ ، $\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ متشابه هستند .

۶۷ ـ جمع جبری رادیکالها ـ فقط رادیکالهای متشابه را می‌توان باهم جمع جبری کرد .

مثال :
$$\sqrt{32}-\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{8}=4\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}$$
$$=(4-\frac{1}{2}-2)\sqrt{2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

۶۸ ـ ضرب کردن رادیکالها

الف ـ اگر عدد فرجهٔ دو یا چند رادیکال یکی باشد برای ضرب کردن آنها از دستور (۲) شمارهٔ ۶۱ همین فصل استفاده می‌کنیم (یعنی $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$) .

مثال :
$$(2\sqrt[3]{4})(3\sqrt[3]{16})=2\times3\sqrt[3]{4\times16}=6\sqrt[3]{64}=24$$

بـ ـ اگر عدد فرجهٔ رادیکالها یکی نباشد بهتر است نماهای کسری و دستورهای مربوط به آنها را به‌کار بندیم.

مثال ۱ :
$$\sqrt[3]{5}\times\sqrt{2}=5^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{2}{6}}\times2^{\frac{3}{6}}$$
$$=(5^2\times2^3)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{200}$$

مثال ۲ :
$$\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2}=\sqrt[3]{2^2}\times\sqrt{2}=2^{\frac{2}{3}}\times2^{\frac{1}{2}}$$
$$=2^{\frac{4}{6}}\times2^{\frac{3}{6}}=2^{\frac{7}{6}}=\sqrt[6]{2^7}=2\sqrt[6]{2}$$

۶۹ـ تقسیم رادیکالها

الف ـ برای به دست آوردن خارج قسمت کامل دو رادیکال اگر عدد فرجهٔ آنها یکی باشد از دستور (۲) شمارهٔ ۶۱ همین فصل استفاده می‌کنیم (یعنی : $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$) .

مثال :

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{\frac{5}{3}\times\frac{3^2}{3^2}}=\sqrt[3]{\frac{45}{3^3}}=\frac{\sqrt[3]{45}}{3}$$

و نیز می‌توان مستقیماً مخرج را گویا کرد:

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{3^2}}=\frac{\sqrt[3]{5\times3^2}}{\sqrt[3]{3^3}}=\frac{\sqrt[3]{45}}{3}$$

ب ـ اگر عدد فرجهٔ رادیکالها یکی نباشد بهتر است از نماهای کسری استفاده کنیم.

مثال ۱ :

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{2}}=\frac{6^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{4}}}=\frac{6^{\frac{2}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}}=\sqrt[4]{\frac{6^2}{2}}=\sqrt[4]{\frac{36}{2}}=\sqrt[4]{18}$$

مثال ۲ :

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt{2}}=\frac{2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}}=\frac{2^{\frac{4}{6}}}{2^{\frac{3}{6}}}=2^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{2}$$

۷۰ ـ گویا کردن مخرجهای دوجمله‌ای

دوجمله‌ایهای گنگ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ و $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ را مزدوج می‌گویند .

همچنین دوجمله‌ایهای $a+\sqrt{b}$ و $a-\sqrt{b}$ را مزدوج می‌نامند .

برای گویا کردن مخرج کسرها درصورتی که این‌مخرجها دوجمله‌ای و به یکی‌ازصورتهای فوق باشند می‌توان صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کرد .

مثال : می‌خواهیم مخرج کسر $\frac{5}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ را گویا کنیم :

$$\frac{5}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{5}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}\times\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{5(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{12-2}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$$

۷۱ ـ تبصره ـ گویا کردن مخرج کسر برای محاسبهٔ تقریبی اعشاری کسرها بسیار مفید است . مثلا برای محاسبهٔ مقدار تقریبی $\frac{1}{\sqrt{8}}$ البته می‌توان مستقیماً عدد ۱ را برمقدار تقریبی $\sqrt{8}=2/828$ تقسیم کرد ولی این طولانی است و بهتر است که مخرج را گویا کنیم $\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ و مقدارتقریبی $\sqrt{2}=1/414$ را بر ۴ تقسیم کنیم تا جواب به دست آید :

$$\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1/414}{4}=0/353$$

تمرین

رادیکالهای زیر را طوری بنویسید که همهٔ اعداد جلو رادیکال درزیر رادیکال قرارگیرند :

۱ $2\sqrt{3}$ ۲ $3\sqrt[4]{3}$ ۳ $2a\sqrt{xy^2}$

۴ $a^2\sqrt[3]{b}$ ۵ $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}$ ۶ $a\sqrt{\frac{1}{a}}$

عبارات زیر را به صورت رادیکال بنویسید ;

۷ $7a^{\frac{2}{4}}$ ۸ $(\frac{3}{4})^{-\frac{3}{2}}$ ۹ $(a+b)^{\frac{3}{4}}$

۱۰ $(a^3b^2)^{\frac{2}{5}}$ ۱۱ $x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$ ۱۲ $3^{\frac{5}{m}}$

عبارات زیر را با توانهای کسری بنویسید ;

۱۳ $\sqrt[3]{27a^5}$ ۱۴ $\sqrt[3]{xy^{-1}}$

۱۵ $\sqrt{\frac{4x-4y}{x+y}}$ ۱۶ $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2x}}$

رادیکالهای زیر را هرچه ممکن است ساده کنید ;

۱۷ $\sqrt{18}$ ۱۸ $\sqrt{72}$

۱۹ $\sqrt[3]{24}$ ۲۰ $\sqrt[6]{128}$

۲۱. $\sqrt[4]{25}$

۲۲. $\sqrt[6]{121}$

۲۳. $\sqrt[6]{216}$

۲۴. $\sqrt{1000}$

۲۵. $\sqrt[4]{0/01}$

۲۶. $\sqrt[3]{64a^3y^5}$

۲۷. $\sqrt{3^2+4^2}$

۲۸. $\frac{1}{\sqrt{a^4}}$

۲۹. $\sqrt{2(a+b)^2}$

اعمال زیر را انجام دهید :

۳۰. $5\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{108}$

۳۱. $3\sqrt{2}+\sqrt{32}-\sqrt[4]{64}$

۳۲. $2\sqrt{18}-3\sqrt{32}+\sqrt{12}-\sqrt{3}$

۳۳. $\sqrt{4(a+b)}+2\sqrt{a+b}-\sqrt{a+b}$

۳۴. $4\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}-3\sqrt[3]{686}$

ضربها و تقسیمهای زیر را انجام دهید و حاصلها را ساده کنید :

۳۵. $\sqrt{5}\times\sqrt{7}$

۳۶. $\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{3}}$

۳۷. $\sqrt{ab^2c^3}\times\sqrt{2a^3b}$

۳۸. $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{2}$

۳۹. $\sqrt{7}\times\sqrt[3]{7}$

۴۰. $\sqrt{14}:\sqrt{7}$

۴۱. $2\sqrt{5}:\sqrt[3]{2}$

۴۲. $\sqrt{a}:\sqrt[3]{b}$

۴۳. $a:\sqrt[3]{a^2}$

۴۴. $2a^2\sqrt{x+y}:a\sqrt[4]{x+y}$

۴۵ $\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$

۴۶ $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{5})$

۴۷ $(3\sqrt{a}+2\sqrt{b})(3\sqrt{a}-2\sqrt{b})$

۴۸ $(\sqrt{a}-3\sqrt{b})^2$

۴۹ $(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab})(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{b})$

۵۰

مخرج هر یك از کسرهای زیر را گویا کنید :

۵۱ $\dfrac{3\sqrt[3]{3}}{4\sqrt[3]{5}}$

۵۲ $\dfrac{\sqrt{6}}{3-2\sqrt{3}}$

۵۳ $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

۵۴ $\dfrac{y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

۵۵ $\dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$

۵۶ $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

۵۷ $\dfrac{3}{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

۵۸ $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+2\sqrt{5}}$

۵۹ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$

۶۰ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$

فصل ۳

معادلات یك مجهولی و دو مجهولی درجه اول

الف ـ کلیات

۱ـ متغیرـ می‌دانیم که: متغیر حرف یا نمادی است که برای نامیدن هریك ازعضوهای یك مجموعهٔ معین به کارمی‌رود. این‌مجموعهٔ معین‌را دامنهٔ متغیر یا حوزهٔ متغیر می‌نامند.

۲ـ معادلهـ اگر در یك تساوی یك (یا چند) حرف وجود داشته باشد وآن تساوی به ازای بعضی از مقادیر آن حرف (یا حروف) درست و به ازای مقادیر دیگر نادرست باشد آن تساوی را تساوی شرطی یا معادله می‌نامند.

مثال ۱: معادلهٔ $۳x^۲-۷x+۲=۰$ یك معادلهٔ یك مجهولی است که فقط به ازای $x=۲$ و $x=\frac{۱}{۳}$ درست است.

مثال ۲: معادلهٔ $۳x+۲y=۵$ یك معادلهٔ دومجهولی است که مثلا به ازای $x=۱$ و $y=۱$ درست است ولی مثلا به ازای $x=۲$ و $y=۳$ درست نیست.

۳ـ مجموعهٔ جواب معادله ـ مجموعهٔ مقادیری ازحرف (یا حروف) مجهول را که متعلق‌به حوزهٔ مجهول بوده به‌ازای‌آنها معادله به تساوی درست تبدیل‌می‌شود مجموعهٔ جواب یا مجموعهٔ صدق معادله می‌نامند. هریك از اعضای مجموعه جواب یك معادله را یك ریشه یا جواب‌آن معادله می‌نامند.

مثال: مجموعهٔ جواب معادلهٔ $۳x^۲-۷x+۲=۰$ عبارت است از $\left\{\frac{۱}{۳}, ۲\right\}$

۴ـ تبصره ـ باید متوجه بود که هر یك از جوابهای معادله باید متعلق به دامنه مجهول باشند. مثلا اگر شرط کنیم که دامنه مجهول معادلهٔ $۳x^۲-۷x+۲=۰$ مجموعهٔ N است در این صورت مجموعهٔ جواب معادله عبارت خواهد بود از $\{۲\}$. زیرا جواب

$x=\frac{1}{3}$ در این مورد قابل قبول نیست .

در این کتاب حوزهٔ تغییرات مجهولهای معادلات عموماً مجموعهٔ R (یعنی مجموعهٔ اعداد حقیقی) است، مگر آن‌که حوزهٔ متغیر را در موارد خاص به صراحت ذکر کنیم .

۵- حل کردن معادله - مقصود از حل کردن معادله بـه دست آوردن مجموعـهٔ جواب آن است .

برای حل کردن معادله عموماً باید آن را بـه معادلهٔ دیگری تبدیل کرد کـه از آن ساده‌تر ولی با آن هم‌ارز باشد .

دومعادله را درصورتی هم‌ارز می‌نامندکه مجموعهٔ جواب آنها یکی باشد (یعنی هر جواب ازهریك ازآنها جواب دیگری نیزباشد).

برای تبدیل‌کردن یك معادله به معادلهٔ ساده‌تر که با آن هم‌ارز باشد از مطالب خوانده شده و دو خاصیت شماره‌های ۶ و ۹ و نتایج مربوط کـه ذیلا ذکر می‌کنیم استفاده می‌شود .

۶- می‌توان به دو طرف یك معادلـه یك عبارت جبری را افزود و یا از دو طرف آن یك عبارت را کم کرد.

مثال : اگر به دو طرف معادلهٔ $3x-x^2=28-x^2+2x$ عبارت x^2 را بیفزاییم معادله ساده‌تر شده به صورت زیر در می‌آید :

$$3x=28+2x$$

و اگر از دو طرف معادلهٔ اخیر عبارت $2x$ را کم کنیم معادله بازهم ساده‌تر شده بـه صورت $x=28$ در می‌آید .

۷- نتیجه - در هر معادله می‌توان جمله‌های مشترك را از دو طرف حـذف کرد، و می‌توان یك جمله را از یك طرف معادله با تغییر دادن علامت آن به طرف دیگر منتقل کرد .

مثال ۱ : اگر در معادلهٔ $3x+5x^2=28-2x+5x^2$ جملهٔ $5x^2$ را که در دو طرف معادله مشترك است حذف کنیم معادله ساده شده به صورت زیر در می‌آید :

$$3x=28-2x$$

و این در حکم آن است که جملهٔ $5x^2$ را از دو طرف معادله کم کرده باشیم .

مثال ۲ : در معادلهٔ $3x=28-2x$ می‌توانیم جملهٔ $-2x$ را تغییر علامت داده آن را از طرف راست معادله به طرف چپ آن ببریم :

$$3x+2x=28$$

و این در حکم آن است که به دو طرف معادله عبارت $2x$ را افزوده باشیم .

۸– می‌توان دو طرف هر معادله را در عددی غیر از صفر ضرب و یا بر عددی غیراز صفر تقسیم کرد .

مثال ۱ : اگـر دو طرف معادلـهٔ $\frac{x+5}{4}-\frac{x-3}{6}=\frac{x}{3}$ را در ۱۲ (که کوچکترین مضرب مشترك مخرجهاست) ضرب کنیم مخرجها از بین می‌روند و معادله ساده می‌شود :

$$3(x+5)-2(x-3)=4x$$

مثال ۲ : اگر دو طرف معادلهٔ :

$$25x-20=15x+10$$

را به ۵ تقسیم کنیم حاصل می‌شود : $5x-4=3x+2$

۹ـ تبصره ـ اولا اگر دو طرف یك معادله را درعبارتی که شامل مجهول معادلـه است ضرب کنیم معادلهٔ جدید ممکن است ریشه یا ریشه‌هایی داشته باشد کـه در معادلهٔ اول صدق نکند .

مثال : اگر دو طرف معادلهٔ $4x-5=0$ را در $x-2$

ضرب کنیم حاصل می‌شود : $(4x-5)(x-2)=0$

و یا : $4x^2-13x+10=0$

عدد $x=2$ ریشهٔ معادلـهٔ اخیر هست ولی در معادلهٔ اول صدق نمی‌کند . در این صورت می‌گویند ریشهٔ $x=2$ برای معادلهٔ $4x-5=0$ ریشهٔ خارجی است.

ثانیاً اگر دو طرف معادله را برعبارتی که شامل مجهول است تقسیم کنیم ممکن است معادلهٔ اصلی ریشه‌ای داشته باشد که در معادلهٔ جدید صدق نکند .

مثال : اگر دوطرف معادلهٔ $x^2-5x=3x$ را بر x تقسیم‌کنیم معادلهٔ $x-5=3$ به دست می‌آید . اما معادلهٔ اول دارای ریشهٔ $x=0$ هست و این ریشه در معادلـهٔ دوم صدق نمی‌کند .

۱۰– معادلهٔ صحیح درجـهٔ اول ـ هر معادله را کـه دو طرف آن چندجمله‌ای باشند معادلهٔ صحیح می‌نامند. اگرهمهٔ جمله‌ها را به یك طرف نقل‌کنیم طرف دوم صفرمی‌شود. در این صورت اگر چندجمله‌ای طرف اول را خلاصه کنیم درجهٔ آن را نسبت بـه مجموعـهٔ حروف مجهول درجهٔ معادله می‌نامند . وقتی به طور خلاصه می‌گوییم معادلهٔ درجـهٔ اول یا

معادلهٔ درجهٔ دوم مقصود معادلات صحیح درجهٔ اول یا درجهٔ دوم هستند .

چند مثال :

$4x-7=0$	معادله‌ای از درجهٔ اول است .
$3x-6y-7=0$	معادله‌ای از درجهٔ اول است .
$4x^2-5x+1=0$	معادله‌ای از درجهٔ دوم است .
$4xy+x^2-3y-2x=0$	معادله‌ای از درجهٔ دوم است .

ب ـ حل معادلهٔ یك مجهولی درجهٔ اول

۱۱ـ حل معادلهٔ درجهٔ اول ـ روش حل این‌قبیل معادلات در مثالهای زیر دیده می‌شود :

مثال ۱ : حل معادلهٔ :

$$3(x+4)-5(x-2)=4(3x-1)+82$$

هریك از دو طرف معادله را ساده می‌کنیم :

$$3x+12-5x+10=12x-4+82$$

و یا :

$$-2x+22=12x+78$$

جمله‌هایی را که شامل مجهول هستند به طرف چپ و مقادیر ثابت را به طرف راست می‌بریم :

$$-2x-12x=78-22$$

و یا :

$$-14x=56$$

دو طرف معادلهٔ اخیر را برضریب مجهول تقسیم می‌کنیم : $x=\frac{56}{-14}$

و از آنجا :

$$\boxed{x=-4}$$

تحقیق ـ اگر در معادلهٔ اصلی به جای x عدد ۴ـ را قرار دهیم حاصل می‌شود :

$$3(-4+4)-5(-4-2)=4(-12-1)+82$$

و یا :

$$30=30$$

و ملاحظه می‌شود که ریشهٔ معادله در آن صدق می‌کند .

مثال ۲ : حل معادلهٔ :

$$\frac{3x-4}{5}=\frac{x}{3}-\frac{4}{15}$$

دو طرف معادله را در ۱۵ (یعنی کوچکترین مضرب مشترك مخرجها) ضرب می‌کنیم تا مخرجها حذف شوند :

$$۳(۳x-۴)=۵x-۴$$

و یا :

$$۹x-۱۲=۵x-۴$$

مجهولها را به یك طرف و معلومها را به طرف دیگر می‌بریم :

$$۹x-۵x=۱۲-۴$$

و یا :

$$۴x=۸$$

و از آنجا :

$$\boxed{x=۲}$$

تحقیق ـ اگر در معادلهٔ اصلی به جای x عدد ۲ را قرار دهیم حاصل می‌شود :

$$\frac{۶-۴}{۵}=\frac{۲}{۳}-\frac{۴}{۱۵}$$

یعنی :

$$\frac{۲}{۵}=\frac{۶}{۱۵}$$

و ملاحظه می‌شود که ریشهٔ معادله در آن صدق می‌کند .

۱۲ ـ حالت کلی ـ هر معادلهٔ صحیح درجهٔ اول یك مجهولی بعداز حذف مخرجها و خلاصه کردن جمله‌ها و بردن مجهولات به یك طرف و معلومات به‌طرف دیگر به صورت زیر در می‌آید :

$$\boxed{ax=b} \qquad (۱)$$

برای تعیین x باید دو طرف معادله را بر a تقسیم کرد و این عمل فقط وقتی ممکن است که a صفر نباشد. پس دو حالت ممکن است رخ دهد :

الف ـ

$$\boxed{a\neq ۰}$$

در این صورت داریم $x=\frac{b}{a}$ که ریشهٔ معادلهٔ مفروض است .

ب ـ

$$\boxed{a=۰}$$

در این صورت معادله به شکل $0 \times x = b$ در می‌آید.

اگر b صفر نباشد هیچ مقداری از x در معادلـه صدق نمی‌کند و می‌گویند معادلـه غیرممکن است.

اگر b صفر باشد معادله به صورت $0 \times x = 0$ در می‌آید و x هرچه باشد درمعادله صدق می‌کند. می‌گویند معادله مبهم است (در این صورت معادله به یك اتحاد تبدیل‌می‌شود).

پس: عموماً معادلهٔ صحیح درجهٔ اول یك‌مجهولی یك جواب وفقط یك جواب دارد، و گاهی غیرممکن است و گاهی مبهم.

بنابراین اگرمعادلهٔ صحیح یك مجهولی درجهٔ اولی مثلاً بیش از یك‌ریشه داشته‌باشد مبهم است و همهٔ مقادیر حقیقی x در آن صدق میکنند.

۱۳ـ مثال از معادلهٔ غیرممکن:

حل معادلهٔ: $3(2x-3)-2(3x-1)=6$

می‌نویسیم: $6x-9-6x+2=6$

و از آنجا: $0 \times x - 7 = 6$

و یا: $0 \times x = 13$

و این معادله غیرممکن است.

۱۴ـ مثال از معادلهٔ مبهم:

حل معادلهٔ: $3(2x-3)-2(3x-1)+7=0$

پس‌از ساده کردن معادله به صورت $0 \times x = 0$ در می‌آید و مبهم است.

۱۵ـ مثال: حل معادلهٔ حرفی:

$$\frac{4x+2}{3}-\frac{x+b}{a}=\frac{5(x-1)}{6}$$

در این معادله x مجهول و a و b معلوم هستند.

ابتدا باید فرض کنیم $a \neq 0$ وگرنه جملهٔ $-\frac{x+b}{a}$ و درنتیجه معادله معنی نخواهد داشت (چرا؟).

سپس دو طرف معادله را در $6a$ که مخالف با صفر فرض شده است ضرب می‌کنیم:

$$2a(4x+2)-6(x+b)=5a(x-1)$$

و یا : $(8a-6-5a)x=-4a+6b-5a$

و یا : $(3a-6)x=6b-9a$

و پس از تقسیم دو طرف بر ۳ حاصل می‌شود :

$$(a-2)x=2b-3a$$

و جواب معادله $\frac{2b-3a}{a-2}$ و $a\neq 2$ است

تمرین

معادلات زیر را حل کنید :

۱ $\frac{7x+9}{4}+x=\frac{5x}{2}+3$

۲ $\frac{2x-3}{9}-\frac{x}{6}=\frac{31-2x}{2}$

۳ $\frac{x+3}{4}-\frac{x-5}{6}=\frac{x-2}{3}$

۴ $\frac{4x+3}{5}-\frac{2x-3}{3}=\frac{x-1}{6}$

۵ $\frac{2x+1}{3}-\frac{5x-2}{7}=x-13$

۶ $\frac{x+7}{4}-\frac{x-1}{6}=\frac{x+2}{3}$

۷ $\frac{5x-14}{3}+\frac{7x-12}{9}=\frac{3x-146}{4}$

۸ $\frac{3x+3}{18}+\frac{2x-1}{45}=\frac{3x-19}{10}$

۹ $\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(x+3)^2}{6}=\frac{(x-2)(x+1)}{2}$

۱۰ $\frac{(x-2)^2}{12}-\frac{(x+1)^2}{21}=\frac{(x-3)(x-6)}{28}$

۱۱ $\frac{25x-655}{95}-\frac{5(x-12)}{209}=\frac{89-3x-\frac{2(x-18)}{5}}{11}$

$$\frac{x+\frac{۲(۳-x)}{۵}}{۸}-\frac{۵x-۳(x-۱)}{۲۴}=\frac{۷x+۲+\frac{۹-۳x}{۵}}{۱۲} \qquad ۱۲$$

کدامیك از معادلات زیر غیرممکن و کدامیك مبهم هستند ؟

$$۲x-\frac{۲x}{۹}=\frac{۱}{۹}(۱۶x-\frac{۳}{۲}) \qquad ۱۳$$

$$\frac{۳x}{۲}-\frac{۲x}{۳}=۵(\frac{x}{۶}+۱)-۵ \qquad ۱۴$$

معادلات زیررا حل کنید (x مجهول و بقیهٔ حروف معلوم فرض می‌شوند):

$$۲abx+a^۲=a^۲x+b^۲x \qquad ۱۵$$

$$a^۲(x-a)=b^۲(x-b) \qquad ۱۶$$

$$(a+x)(b+x)=x(x-c) \qquad ۱۷$$

$$\frac{x}{ab}-\frac{a-x}{a(a+b)}=\frac{b-x}{b(a+b)} \qquad ۱۸$$

$$m^۲(x+۱)=x+m \qquad ۱۹$$

$$(m^۲-۱)x=m(m+۱)(m+۲) \qquad ۲۰$$

$$(m+۲)x+۴(۲m+۱)=m^۲+۴(x-۱) \qquad ۲۱$$

$$(a+b)^۲x+۲a^۲=۲a(a+b)+(a^۲+b^۲)x \qquad ۲۲$$

$$\frac{m^۲(x+۲)^۲}{۸}-۲(۲x+m+۱)=(m+۱)^۲+\frac{m^۲(x-۲)^۲}{۸}+۱ \qquad ۲۳$$

ج ـ معادلاتی که حل آنها به حل معادلهٔ درجهٔ اول منجر می‌شود

۱۶ـ معادلاتی که به صورت $A\times B\times C\times\cdots\times S=۰$ هستند ـ می‌دانیم که برای آن که حاصلضرب دو یا چند عامل صفر باشد لازم و کافی است که لااقل یکی از آن عاملها صفر باشد بنا براین:

مجموعهٔ ریشه‌های معادلهٔ $A\times B\times C\times\cdots\times S=۰$ که در آن A و B و C و... و S چندجمله‌ای هستند عبارت است از اجتماع مجموعه‌های جواب معادلات :

$$A=۰ \quad \text{یا} \quad B=۰ \quad \text{یا} \quad C=۰ \quad \text{یا} \quad \cdots \quad \text{یا} \quad S=۰$$

مثال ۱ : حل معادلهٔ : $(x-۳)(۲x-۷)(۴x+۲)=۰$

از این معادله سه معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود :

$$x-3=0 \quad \text{و از آنجا :} \quad x=3$$

$$2x-7=0 \quad \text{»} \quad x=\frac{7}{2}$$

$$3x+2=0 \quad \text{»} \quad x=-\frac{2}{3}$$

پس مجموعهٔ جواب معادلهٔ مفروض عبارت است‌از : $\left\{3\ ,\ \frac{7}{2}\ ,\ -\frac{2}{3}\right\}$

مثال ۲ : حل معادلهٔ : $x(x^2-9)=0$

از این معادله سه معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود :

$$x=0 \qquad x=0$$

$$x-3=0 \qquad x=3$$

$$x+3=0 \qquad x=-3$$

و مجموعهٔ جواب معادلهٔ مفروض عبارت است‌از : $\{0\ ,\ 3\ ,\ -3\}$

مثال ۳ : حل معادلهٔ : $(3x-5)^2-(x-3)^2=0$

معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت (چرا؟) :

$$(3x-5+x-3)(3x-5-x+3)=0$$

و یا : $(4x-8)(2x-2)=0$

و مجموعهٔ جوابهای آن عبارت است از : $\{1\ ,\ 2\}$

مثال ۴ : حل معادلهٔ : $\frac{x^2-9}{x+2}=0$

کسر طرف چپ فقط وقتی معین است که مخرج آن مخالف با صفر یعنی $x\neq-2$ باشد . اگر این شرط برقرار باشد شرط لازم و کافی برای آن‌که کسر صفر شود آن است که صورت آن صفر شود پس $x^2-9=0$ یا $(x-3)(x+3)=0$

و مجموعهٔ جواب معادله عبارت است از $\{3\ ,\ -3\}$

این دو جواب چون مخالف با -2 هستند قابل قبولند.

به طور کلی: ریشه‌های معادلهٔ $\frac{A}{B}=0$ ریشه‌هایی از معادلهٔ $A=0$ هستند که B را صفر نمی‌کنند .

مثال ۵ : حل معادلهٔ : $\frac{x+2}{x-2}-\frac{1}{x}=\frac{2}{x(x-2)}$

این معادله فقط وقتی معنی دارد که هیچیک از مخرجهای آن صفر نباشند یعنی باید :

$$x\neq2\ ,\quad x\neq0$$

به فرض این‌که این دو شرط برقرار باشد می‌توانیم مخرجها را از بین ببریم و برای این‌کار دو طرف معادله را در $x(x-۲)$ ضرب می‌کنیم حاصل می‌شود :

$$x(x+۲)-(x-۲)=۲$$

و یا :

$$x(x+۱)=۰$$

که ریشه‌های آن $x=۰$ و $x=-۱$ است . اما ریشهٔ $x=۰$ قابل قبول نیست (چرا؟) و مجموعهٔ جواب معادله عبارت است از : $\{-۱\}$

از آنچه گذشت روش کلی زیر به دست می‌آید :

بعد از حذف مخرجها معادلهٔ صحیحی را که به دست می‌آید حل می‌کنیم و از بین جوابهای آن ، آنهایی که لااقل یکی از مخرجهای معادله را صفر می‌کنند حذف می‌کنیم .

تمرین

معادلات زیر را حل کنید :

۱. $x(x-۱)(x+۳)=۰$

۲. $(x+۴)(۲x+۷)(۳x+۵)=۰$

۳. $(۲x+۳)(x^۲-۴۹)=۰$

۴. $(۵-۳x)(۹x^۲-۲۵)=۰$

۵. $(x-۲)(۸۱x-۴x^۲)=۰$

۶. $۲۷x^۲(x+۳)-۱۲(x^۲+۳x)=۰$

۷. $(۹-x^۲)(۸x^۲-۵۰)=۰$

۸. $(۲x+۳)(۴x-۱)=(۹-۴x^۲)$

۹. $(x+۲)^۲-x^۲+۴=۰$

۱۰. $(۵-۲x)(۲x+۷)=۴x^۲-۲۵$

۱۱. $(x+۵)^۲-(۲x-۳)^۲=۰$

۱۲. $(۲x+۷)^۲-۹(x+۲)^۲=۰$

۱۳. $۴(۲x+۷)^۲-۹(x+۳)^۲=۰$

۱۴. $(۴x^۲-۳x-۱۸)^۲-(۴x^۲+۳x)^۲=۰$

معادلات زیر را حل کنید :

۱۵. $$\frac{۲x+۵}{x+۳}+\frac{۳x-۲}{x}=۵$$

۱۶. $$\frac{۳x+۴}{۵}+\frac{۲x-۳}{۴x-۵}=\frac{۹x-۸}{۱۵}$$

۱۷. $$\frac{۷}{x-۳}-\frac{۴}{x-۵}=\frac{۳}{x+۱}$$

۱۸. $$\frac{۱۲}{x-۷}-\frac{۵}{x-۱}=\frac{۷}{x-۱۰}$$

۱۹. $$\frac{۲}{x-۴}+\frac{۱}{۲x-۳}=\frac{۵}{۷x-۶}$$

۲۰ $$\frac{1}{5x+8}+\frac{1}{x+4}=\frac{9}{8(x+3)}$$

۲۱ $$\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}=\frac{2x}{x^2-1}$$

۲۲ $$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=3x\left(1-\frac{x-1}{x+1}\right)$$

۲۳ $$\frac{x-1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{2x-1}{x^2+x}$$

د- دستگاههای معادلات دو مجهولی درجه اول

۱۷- معادلهٔ دو مجهولی - معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ اول زیر را درنظرمی‌گیریم:

$$2x-3y=1 \qquad (1)$$

اگربه y عدد دلخواه ۳ را نسبت دهیم معادلهٔ فوق به صورت $2x-9=1$ درمی‌آید که جواب آن $x=5$ است .

اگر درمعادلهٔ فوق x رامجهول اول و y را مجهول دوم بنامیم زوج مرتب $(5\ ,\ 3)$ یك جواب معادلهٔ (۱) است .

به همین طریق اگر به x عددهای ۰/۵ و ۱− و ۲+ را نسبت دهیم برای y بـه ترتیب جوابهای ۰ و ۱− و ۱ به دست می‌آید و زوجهای مرتب :

$$(0/5\ ,\ 0)\ \text{و}\ (-1\ ,\ -1)\ \text{و}\ (2\ ,\ 1)$$

سه جواب از معادلهٔ (۱) هستند .

از روی این‌مثال‌پیداست‌که: یك معادلهٔ دومجهولی درجه اول بی‌نهایت جواب دارد که‌هر جواب آن یك زوج مرتب است .

مجموعهٔ این زوجهای مرتب را مجموعهٔ جواب معادله می‌نامند .

۱۸- دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی - دو معادلهٔ دومجهولی زیر را کـه درآن x و y عددهای حقیقی فرض می‌شوند در نظر می‌گیریم :

$$\begin{cases} 3x+2y=19 & (1) \\ 2x-3y=4 & (2) \end{cases}$$

ایـن دومعادله وقتی توأماً در نظرگـرفته شوند یك دستگاه دو مجهولی نامیده میشونـد. مقصود از حل کردن این دستگاه یافتن مجموعهٔ جوابهای مشترك دو معادلهٔ (۱) و (۲) است. به این معنی‌که معادلهٔ (۱) بی‌نهایت جواب دارد ومجموعه جواب آن مجموعـه‌ای است بی‌پایان متشکل از زوجهای مرتب. این مجموعه را A می‌نامیم. همچنین معادلـهٔ (۲) دارای بـی‌نهایت

جواب است و مجموعهٔ جواب آن مجموعه‌ای است بی‌پایان و متشکل از زوجهای مرتب. این مجموعه را B می‌نامیم. بنابراین:

$$A=\left\{(x,y) \mid ۳x+۲y=۱۹\right\}$$

$$B=\left\{(x,y) \mid ۲x-۳y=۴\right\} \quad \text{و}$$

اگر اشتراک دو مجموعهٔ A و B یعنی $A \cap B$ تهی نباشد متشکل از زوجهای مرتبی‌است کـه هم جواب معادلهٔ (۱) است و هم جواب معادلهٔ (۲). این اشتراک را جواب دستگاه‌مفروض می‌نامند.

برای حل‌کردن یک دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ اول باید با استفاده از دو معادلهٔ مفروض یک معادلهٔ یک‌مجهولی به دست آورد که با هریک از دو معادلهٔ مفروض تشکیل‌دستگاهی هم ارز با دستگاه مفروض را بدهد.

منظور ازهم‌ارزی دو دستگاه چندمعادله چندمجهولی درجه‌اول یکی بودن مجموعهٔ جوابهای آنها است.

برای حل دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه اول چند روش معمول است که اینک به شرح آنها می‌پردازیم.

۱۹ــ روش اول ـ قاعدهٔ تبدیل

مثال: حل دستگاه:

$$\begin{cases} ۳x+۲y=۱۹ & (۱) \\ ۲x-۳y=۴ & (۲) \end{cases}$$

ازمعادلهٔ (۱) مقدار y را حساب می‌کنیم چنان‌که گویی x مقدار معلومی است. حاصل می‌شود:

$$y=\frac{۱۹-۳x}{۲}$$

اکنون این مقدار y را در معادلهٔ (۲) قرار می‌دهیم تـا یک معادلهٔ یک‌مجهولی حاصل شود:

$$۲x-\frac{۳(۱۹-۳x)}{۲}=۴$$

و یا: $۱۳x=۶۵$

و از آنجا: $x=۵$

حال اگر این‌مقدار x را درهریك ازمعادلات (۱) و (۲) قراردهیم حاصل‌می‌شود $y=۲$.

قاعدهٔ تبدیل ـ برای حل کردن دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی درجهٔ اول یکـی از دومجهول را برحسب دیگری از یـك معادلـهٔ دستگاه حساب کرده این مقدار را بـه جای مجهول مزبور در معادلهٔ دیگر دستگاه قرار می‌دهیم .

به این‌نحو می‌توان دستگاه را به چهارطریق حل کرد زیرا در هریك ازدومعادله می‌توان یکـی از دو مجهول را انتخاب و آن را برحسب دیگری حساب کرد . در عمل مجهولـی را انتخاب می‌کنند که ضریب آن کوچکتر باشد یا محاسبه با آن آسانتر انجام پذیرد .

۲۰- روش دوم ـ قاعدهٔ حذف

مثال : حل دستگاه :

$$\begin{cases} ۸x+۱۵y=۳۱ & (۱) \\ ۷x-۱۰y=۴ & (۲) \end{cases}$$

ضرایب x در دو معادله ۸ و ۷ هستند . می‌خواهیم کاری کنیم که این دو ضریب به دوعدد قرینهٔ یکدیگر تبدیل شوند . پس دوطرف معادلهٔ اول را در ۷ و دو طرف معادلهٔ دوم را در ۸ — ضرب می‌کنیم حاصل می‌شود :

$$\begin{cases} ۵۶x+۱۰۵y=۲۱۷ & (۳) \\ -۵۶x+۸۰y=-۳۲ & (۴) \end{cases}$$

اکنون اگر این دو معادله را عضو به عضو باهم جمع کنیم xها حذف شده معادلهٔ یك‌مجهولی زیر به دست می‌آید که با هریك از دو معادلهٔ (۱) و (۲) تشکیل دستگاهـی هم‌ارز با دستگاه مفروض می‌دهد.

$$۱۸۵y=۱۸۵$$

و از آنجا : $y=۱$

اکنون اگر این مقدار y را مثلا در معادلهٔ (۱) قراردهیم حاصل می‌شود :

$$۸x+۱۵=۳۱$$

و از آنجا : $x=۲$

تبصره ـ اگر می‌خواستیم که در دستگاه مفروض مجهول y را حذف‌کنیم چون ضرایب y در دو معادله ۱۵ و ۱۰ — است و این دو عدد یك شمارندهٔ مشترك دارند کـه ۵ است بهتر بود ۱۵ و ۱۰ — را برشمارندهٔ مشترك آنها یعنی ۵ تقسیم کنیم تا ۳ و ۲ — به دست آید . سپس دو طرف معادلـهٔ (۱) را در ۲ و دو طرف معادلـهٔ (۲) را در ۳ ضرب کنیم تـا

حاصل شود :

$$\begin{cases} 16x+30y=62 & (5) \\ 21x-30y=12 & (6) \end{cases}$$

از جمع کردن معادلات (۵) و (۶) عضو به عضو حاصل می‌شود : $37x=74$
و از آنجا $x=2$ و چون ۲ را مثلا در معادلهٔ (۲) قرار دهیم معلوم می‌شود که $y=1$.

قاعدهٔ حذف - برای حل دستگاه دو معادله دو مجهولی درجهٔ اول دوطرف هرمعادله رادر اعداد مناسبی ضرب می‌کنیم به قسمی که ضرایب یکی از مجهولها در دو معادله جدید دو عدد قرینه شوند آن‌گاه دومعادله را عضو به عضو باهم جمع می‌کنیم تامجهول مزبور حذف شود و یك معادلهٔ یك‌مجهولی به دست آید.

۲۱- حل دستگاه دو مجهولی درجهٔ اول در حالت کلی

صورت کلی هر معادلهٔ دو مجهولی برحسب x و y چنین است:

$$ax+by=c$$

که در آن بعضی یا همگی ضرایب a و b و c ممکن است صفر باشند.

پس صورت کلی یك دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی درجهٔ اول عبارت‌است از :

$$\begin{cases} ax+by=c & (1) \\ a'x+b'y=c' & (2) \end{cases}$$

که در آن ضرایب a,b,c,a',b',c' اعداد معلومی هستند.

برای حل کردن دستگاه فوق یکی از دو روش مذکور مثلا روش اول را به‌کارمی‌بریم و دو حالت تمیز می‌دهیم :

الف - فرض می‌کنیم لااقل یکی از ضرایب مجهولها یعنی یکی از ضرایب a , b و a' , b' مخالف صفر باشد مثلا $a\neq 0$
از معادلهٔ (۱) مقدار x را حساب می‌کنیم :

$$x=\frac{c-by}{a} \qquad (3)$$

که چون در معادلهٔ (۲) قرار دهیم نتیجه می‌شود :

$$\frac{a'(c-by)}{a}+b'y=c' \qquad (4)$$

و یا :

$$(ab'-a'b)y=ac'-a'c \qquad (5)$$

حال برحسب آن‌که ضریب y مخالف یا مساوی با صفر باشد دو حالت تمیزمی‌دهیم :

اگر $ab'-a'b\neq ۰$ در این صورت از معادلهٔ (۵) حاصل می‌شود :

$$y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

و چون این مقدار را در معادلهٔ (۳) قرار دهیم نتیجه می‌شود :

$$x=\frac{c-\frac{b(ac'-a'c)}{ab'-a'b}}{a}=\frac{c(ab'-a'b)-b(ac'-a'c)}{a(ab'-a'b)}$$

$$=\frac{cab'-bac'}{a(ab'-a'b)}=\frac{cb'-bc'}{ab'-a'b}$$

پس اگر شرایط فوق برقرار باشد جوابهای دستگاه مفروض عبارتنداز :

$$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b} \qquad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

این دستورها را دستورهای کرامر می‌نامند .

۲۲ـ تغییر مجهول ـ اگر دستگاهی از درجهٔ اول نباشد گاهی می‌توان با انتخاب مجهول جدید حل آن را به حل دستگاه درجهٔ اول منجر کرد .

مثال ۱ : حل دستگاه :

$$\begin{cases}\frac{۴}{x}+\frac{۳}{y}=۱۳\\ \frac{۵}{x}-\frac{۳}{y}=-۳۱\end{cases}$$

اگر $\frac{۱}{x}$ و $\frac{۱}{y}$ را به ترتیب X و Y بنامیم دستگاه به صورت زیر درمی‌آید :

$$\begin{cases}۴X+۳Y=۱۳\\ ۵X-۳Y=-۳۱\end{cases}$$

و ازحل‌آن حاصل می‌شود : $X=-۲$ و $Y=۷$

پس : $\frac{۱}{x}=-۲$ و $x=-\frac{۱}{۲}$

و $\frac{۱}{y}=۷$ و $y=\frac{۱}{۷}$

مثال ۲ : حل دستگاه :

$$\begin{cases}\frac{xy}{x+y}=\frac{۸}{۳}\\ \frac{yz}{y+z}=\frac{۸}{۵}\\ \frac{xz}{x+z}=\frac{۴}{۳}\end{cases}$$

اگر نسبتها را وارونه کنیم دستگاه به صورت زیر درمی‌آید :

$$\begin{cases} \frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{۳}{۸} \\ \frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}=\frac{۵}{۸} \\ \frac{۱}{z}+\frac{۱}{x}=\frac{۳}{۴} \end{cases}$$

اکنون $\frac{۱}{x}$ و $\frac{۱}{y}$ و $\frac{۱}{z}$ را به ترتیب X و Y و Z می‌نامیم و دستگاه را حل‌می‌کنیم حاصل می‌شود :

$$Z=\frac{۱}{۲} \quad , \quad Y=\frac{۱}{۸} \quad , \quad X=\frac{۱}{۴}$$

و از آنجا : $z=۲ \quad , \quad y=۸ \quad , \quad x=۴$

تمرین

دستگاههای معادلات زیر را حل کنید :

۱ $\begin{cases} ۳x-۷y=-۵۵ \\ ۵x+۴y=۱۸ \end{cases}$ ۲ $\begin{cases} ۱۲x-۵y=۶۳ \\ ۸x-۱۵y=۷۷ \end{cases}$

۳ $\begin{cases} ۹x+۱۰y=۷۵ \\ ۱۲x+۲۵y=۱۳۵ \end{cases}$ ۴ $\begin{cases} ۱۲x+۷y=۷۱ \\ ۱۸x+۱۳y=۹۹ \end{cases}$

۵ $\begin{cases} ۹x-۸y=۸۵ \\ ۱۳x-۱۲y=۱۱۷ \end{cases}$ ۶ $\begin{cases} ۵x+۲۱y=۷۷ \\ ۹x-۱۴y=۳۵ \end{cases}$

۷ $\begin{cases} ۳۱x-۴y=۴۹۵ \\ ۱۸x-۱۷y=۱۷۰ \end{cases}$ ۸ $\begin{cases} ۴۳x+۳۷y=۲۶۳ \\ ۲۳x+۷y=۲۴۳ \end{cases}$

۹ $\begin{cases} ۶۱x-۲۵y=۶۴۰ \\ ۴۹x-۱۹y=۵۲۶ \end{cases}$ ۱۰ $\begin{cases} \frac{۳x}{۴}+\frac{۷y}{۳}=۴۱ \\ \frac{۵x}{۲}-\frac{۳y}{۵}=۱۱ \end{cases}$

۱۱ $\begin{cases} \frac{۵x}{۳}-\frac{۲y}{۵}=۱۹ \\ ۴x+\frac{۳y}{۲}=۲۱ \end{cases}$ ۱۲ $\begin{cases} \frac{۹x}{۷}-\frac{۲y}{۳}=-۲۸ \\ \frac{۳x}{۲}+\frac{۱۲y}{۵}=۱۵ \end{cases}$

۱۳
$$\begin{cases} x+y=\frac{۴x-۳}{۵} \\ x+۲y=\frac{۱۵-۹y}{۱۴} \end{cases}$$

۱۴
$$\begin{cases} \frac{۲x-۵y-۱}{۱۱}+\frac{x-۲y}{۳}=۱۶ \\ \frac{۷x+y}{۵}+\frac{۲(x-۱)}{۳}=۳۱ \end{cases}$$

۱۵
$$\begin{cases} \frac{۳x+۲y}{۴}+\frac{۶x+۵y}{۱۳}=-۹ \\ \frac{۴x-۵y+۱۶}{۱۷}=\frac{۶x+y}{۱۵} \end{cases}$$

۱۶
$$\begin{cases} \frac{(x+۳)^۲+(y-۸)^۲}{x^۲+y^۲+۳۹}=۱ \\ \frac{۲x+۳y+۸}{۵x+۴y-۱}=\frac{۳}{۴} \end{cases}$$

۱۷
$$\begin{cases} ۳x\sqrt{۲}+۲y=۸ \\ x\sqrt{۲}-y=۱ \end{cases}$$

۱۸
$$\begin{cases} ۵x\sqrt{۵}-۷y\sqrt{۳}=۲۹ \\ \frac{x}{\sqrt{۵}}-\frac{y}{\sqrt{۵}}=۱ \end{cases}$$

معادلات حرفی زیر را حل کنید .

۱۹
$$\begin{cases} x+y=۲a \\ x-y=۲b \end{cases}$$

۲۰
$$\begin{cases} ax+by=۲a \\ a^۲x-b^۲y=a^۲+b^۲ \end{cases}$$

۲۱
$$\begin{cases} ax+by=۲ab \\ bx+ay=a^۲+b^۲ \end{cases}$$

۲۲
$$\begin{cases} x+y=a-۲b \\ bx+ay+b^۲=۰ \end{cases}$$

۲۳
$$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=۲ \\ bx-ay=۰ \end{cases}$$

۲۴
$$\begin{cases} \frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=۲a \\ \frac{x-y}{۲ab}=\frac{x+y}{a^۲+b^۲} \end{cases}$$

دستگاه معادلات زیر را حل کنید :

۲۵
$$\begin{cases}\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{y}=4\\[2mm] \dfrac{12}{x}-\dfrac{3}{y}=2\end{cases}$$

۲۶
$$\begin{cases}\dfrac{3}{2x}+\dfrac{2}{5y}=\dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{5}{2x}-\dfrac{7}{3y}=\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

۲۷
$$\begin{cases}\dfrac{12}{x-3}-\dfrac{5}{y+2}=63\\[2mm] \dfrac{8}{x-3}+\dfrac{15}{y+2}=-13\end{cases}$$

۲۸
$$\begin{cases}\dfrac{4}{2x-1}+\dfrac{3}{2(3y+2)}=21\\[2mm] \dfrac{5}{6x-3}-\dfrac{2}{15y+10}=19\end{cases}$$

ح ـ دستگاههای چندمجهولی ـ دستگاههای خاص

۲۳ـ دستگاه سه معادلهٔ سه‌مجهولی درجهٔ اول ـ روشهایی را که برای حل کردن دستگاه دومجهولی گفتیم می‌توان برای دستگاههای چندمجهولی نیز به‌کار برد .

مثال : حل دستگاه :

$$\begin{cases}3x+5y-3z=34 & (1)\\ 4x-7y+z=3 & (2)\\ 2x+3y-2z=22 & (3)\end{cases}$$

روش اول ـ z را برحسب x و y مثلا ازروی معادلهٔ (۲) حساب‌کرده در معادلات (۱) و (۳) قرار می‌دهیم ، حاصل می‌شود :

$$\begin{cases}z=3-4x+7y & (4)\\ 15x-16y=43 & (5)\\ 10x-11y=28 & (6)\end{cases}$$

معادلات (۵) و (۶) تشکیل یك دستگاه دومجهولی می‌دهند‌که از حل‌کردن آن حاصل می‌شود : $\quad x=5 \quad$ و $\quad y=2$

وچون این مقادیر را درمعادلهٔ (۴) قراردهیم نتیجه می‌شود : $z=-3$.

به این طریق توانستیم حل یك دستگاه سه‌مجهولی را منجر بــه حل یك دستگاه دومجهولی کنیم . این قاعده کلی است . به همین روش مثلا دستگاه چهارمجهولـی درجـهٔ اول را بـه دستگاه سه‌مجهولی و سپس آن را به دستگاه دومجهولی تبدیل می‌کنند .

روش دوم ـ مجهول z را ابتدا بین معادلات (۱) و (۲) و سپس بین معـادلات (۲) و (۳) حذف می‌کنیم :

$$(1)\quad 3x+5y-3z=34 \qquad\qquad (3)\quad 8x-14y+2z=6$$

$$\begin{array}{llll} (4') & 2x+3y-2z=22 & (2') & 12x-21y+2z=9 \\ \hline (6') & 10x-11y \quad =28 & (5) & 15x-16y \quad =43 \end{array}$$

بازهم مطلب به‌حل دستگاه دومعادله دو مجهولی '(۵) و '(۶) رجوع میشودکه از روی آنها جوابهای ۵ = x و ۲ = y به دست می‌آید و سپس از یکی از معادلات دستگاه ۳ — = z حساب می‌شود.

۲۴- حل بعضی دستگاههای خاص.

مثال ۱: حل دستگاه

$$\begin{cases} \frac{x}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z}{7} & (1) \text{ و } (2) \\ 5x-3y+z=6 & (3) \end{cases}$$

دراین مثال مجهولهای x , y و z به ترتیب با اعداد ۲ , ۵ و ۷ متناسبند . اگرچه می‌توان با طرفین و وسطین کردن معادلات (۱) و (۲) دو معادلهٔ ساده بـه دست‌آورد اما بهتر است به طریق زیر عمل کنیم :

مقدار مشترك نسبتهای $\frac{x}{2}$ و $\frac{y}{5}$ و $\frac{z}{7}$ را t می‌نامیم . در این صورت داریم :

$$z=7t \quad , \quad y=5t \quad , \quad x=2t \qquad (4)$$

چون این مقادیر را در معادلهٔ (۳) بگذاریم حاصل می‌شود :

$$10t-15t+7t=6$$

و از آنجا :

$$t=3$$

که چون در معادلات (۴) قراردهیم نتیجه می‌شود :

$$z=21 \quad , \quad y=15 \quad , \quad x=6$$

۲۵- مثال ۲ - می‌خواهیم عدد ۱۱۰ را به نسبت اعداد ۲ , ۳ و ۵ تقسیم کنیم .

اگر سه قسمت را x , y و z بنامیم داریم :

$$\begin{cases} \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5} \\ x+y+z=110 \end{cases}$$

از حل این دستگاه مانند شمارهٔ قبل حاصل می‌شود :

$$z=55 \quad , \quad y=33 \quad , \quad x=22$$

۲۶ـ حالتی که عدهٔ مجهولها بیش از عدهٔ معادلات است .

مثال : دستگاه : $\begin{cases} x-2y+z=7 \\ 2x+y-3z=5 \end{cases}$ رادرنظرمی گیریم. اگر به z مقداردلخواهی مثلا ۵ــ یا ۲ یا ۷ و غیره نسبت دهیم یك دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی برحسب x و y به دست می‌آید و می‌توان آن را حل کرد .

اگر عدهٔ مجهولات بیش از عدهٔ معادلات باشد دستگاه عموماً بی‌نهایت جواب دارد.

۲۷ـ حالتی که عدهٔ مجهولها کمتر از عدهٔ معادلات است .

دستگاه : $\begin{cases} x+y=10 & (1) \\ x-y=2 & (2) \\ 3x+5y=13 & (3) \end{cases}$ را درنظرمی گیریم . جواب دستگاهی که از معادلات (۱) و (۲) تشکیل شود $x=6$ و $y=4$ است . اما اگر این مقادیر را در معادلهٔ (۳) قراردهیم طرف سمت چپ آن ۳۸ می‌شود ومساوی با ۱۳ نیست. پس‌این‌دستگاه غیرممکن‌است .

اگر معادلهٔ (۳) به صورت $3x+5y=38$ باشد آن‌وقت اعداد $x=6$ و $y=4$ جوابهای دستگاه خواهند بـــود . در این صورت می‌گویند معادلات دستگاه باهم سازگار هستند .

تمرین

دستگاههای زیر را حل کنید :

۱
$$\begin{cases} 2x+3y-z=24 \\ 4x-2y+3z=6 \\ 6x-y+2z=22 \end{cases}$$

۲
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+4z=8 \\ x+3y+9z=27 \end{cases}$$

۳
$$\begin{cases} 3x+y+z=30 \\ x+3y+z=34 \\ x+y+3z=36 \end{cases}$$

۴
$$\begin{cases} 2x+3y-4z=0 \\ 4x-5y+z=14 \\ 9x-y-6z=19 \end{cases}$$

۵
$$\begin{cases} \frac{4x}{3}-\frac{3y}{2}-2z=0 \\ \frac{x}{5}+\frac{y}{4}-\frac{z}{2}=3 \\ \frac{2x}{3}-\frac{7y}{4}+z=0 \end{cases}$$

۶
$$\begin{cases} \frac{x+3y}{5}+\frac{y+z}{6}=z \\ \frac{2x+5}{7}+\frac{4z+5}{3}=z+1 \\ \frac{3y+7}{8}+\frac{2z+1}{3}=y-1 \end{cases}$$

فصل ۴

خواص نامساویها در مجموعهٔ اعداد حقیقی و نامعادلات

۱ــ در فصل ۲ خواص مهم اعمال روی عددهای حقیقی را یادآور شدیم. خواص مذکور برای مقایسهٔ دو عدد حقیقی کافی نیست و باید علاوه بر خواصی که در بارهٔ دو عمل جمع و ضرب بیان کردیم چهار خاصیت دیگر را دربارهٔ رابطهٔ $<$ « کوچکتر است از » بپذیریم. این چهار خاصیت را (O_1)[1] و (O_2) و (O_3) و (O_4) می‌نامیم تا به سهولت بتوانیم به آنها اشاره و رجوع کنیم.

رابطهٔ $a<b$ را چنین می‌خوانیم: « **a** کوچکتر است از **b** ».

اگر **a** کوچکتر از **b** باشد گاهی می‌نویسیم $b>a$ و می‌خوانیم « **b** بزرگتر است از **a** » بنابراین دو رابطهٔ $a<b$ و $b>a$ یک معنی دارند و هرچه دربارهٔ اولی بگوییم دربارهٔ دومی نیز درست است. هریک از روابط فوق را یک نامساوی می‌خوانند.

۲ــ بیان خاصیتهای چهارگانهٔ نامساویها

الف ــ اگر **a** و **b** دو عدد حقیقی باشند فقط یکی از سه رابطهٔ زیر درست است:

$$(O_1) \qquad \forall a,b\in R \;:\; a<b \text{ یا } a=b \text{ یا } b<a$$

ب ــ اگر **a** و **b** و **c** اعدادی حقیقی باشند از دو رابطهٔ $a<b$ و $b<c$ نتیجه می‌شود $a<c$.

$$(O_2) \qquad \forall a,b,c\in R \;:\; a<b \text{ و } b<c \Longrightarrow a<c$$

مثال: چون $2<-3$ و $8>2$ پس $-3<8$.

ج ــ اگر **a** و **b** و **c** عددهای حقیقی باشند از رابطهٔ $a<b$ می‌توان نتیجه گرفت: $a+c<b+c$

۱ــ حرف O از کلمهٔ انگلیسی Order (= ترتیب) گرفته شده است.

$$(O_۳) \qquad \boxed{\forall a,b,c\in R \;:\; a<b \Rightarrow a+c<b+c}$$

یعنی : می‌توان به دو طرف یك نامساوی یك عدد را افزود .

مقصود این است که اگر به دو طرف یك نامساوی یك عدد را بیفزاییم ، باز یك نامساوی بدست حاصل می‌شود .

مثال : چون $-۸<-۳$ پس $-۸+۱۰۰<-۳+۱۰۰$ یعنی $۹۲<۹۷$.

نتیجه ــ می‌توان از دو طرف یك نامساوی یك عدد را کم کرد .

زیرا بنا به‌تعریف تفریق که‌درفصل ۲ دیدیم، عمل‌تفریق c از یك عددیعنی افزودن c — به همان عدد .

$$\boxed{a<b\Longrightarrow a-c<b-c}$$

مثال : چون $-۷<۲$ پس $-۷-۲<۲-۲$ یعنی $-۹<۰$.

د ــ اگر **a** و **b** و c اعدادی حقیقی باشند و $c>۰$ از رابطهٔ $a<b$ می‌توان نتیجه گرفت $ac<bc$

$$(O_۴) \qquad \boxed{\forall a,b,c\in R \;,\; c>۰ \;:\; a<b \Rightarrow ac<bc}$$

یعنی : می‌توان دو طرف یك نامساوی را در عددی بزرگتر از صفر ضرب کرد . بی‌آن که در جهت نامساوی تغییری حاصل شود .

مثال : چون $-۳<-۱$ و $۵>۰$ پس $(-۳)\times ۵<(-۱)\times ۵$

یعنی $-۱۵<-۵$.

تعریف

$$a<b<c\Longleftrightarrow a<b\wedge b<c$$

۳ـ نتایج حاصل از آنچه تاکنون دیده‌ایم :

۱) از دو نامساوی $a<b$ و $c<۰$ می‌توان نتیجه گرفت $ac>bc$.

$$\boxed{\forall a,b,c\in R \;,\; c<۰ : a<b \Longrightarrow ac>bc}$$

یعنی: اگردوطرف یك نامساوی را دریك عددمنفی ضرب‌کنیم‌جهت نامساوی عوض‌می‌شود.

۲) از دو نامساوی $a<b$ و $c<d$ می‌توان نتیجه گرفت $a+c<b+d$.

$$\forall a, b, c, d \in R \quad : \quad a<b \,,\, c<d \Longrightarrow a+c<b+d$$

یعنی: می‌توان دو نامساوی متحدالجهت را عضو به عضو باهم جمع کرد.

از نتیجهٔ ۲) معلوم می‌شود که:
مجموع دو عدد مثبت مثبت است و مجموع دو عدد منفی منفی است.

۳) اگر a و b و c و d اعدادی مثبت‌باشند ازدو نامساوی $a<b$ و $c<d$ می‌توان نتیجه گرفت $ac<bd$.

$$a,b,c,d \in R \quad : \quad 0<a<b \text{ و } 0<c<d \Longrightarrow ac<bd$$

تمرین

۱ ــ بین اعداد هریك از زوجهای زیرعلامت $>$ را قراردهید به‌قسمی‌که یك‌نامساوی درست حاصل شود :

۲ ــ بین عددهای‌هریك از زوجهای زیرعلامت $<$ را قرار دهید به‌قسمی‌که یك‌نامساوی درست حاصل شود :

$$(۷,-\frac{۵}{۹}) \qquad (-۳,\frac{۱۱}{۲}) \qquad (-۶,-۵) \qquad (-۸,۷)$$

۳ ــ کدام یك ازنامساویهای مضاعف زیر صحیح وکدام یك غلط است :

$$۳<۵<۷ \qquad\qquad ۴>۲>۱$$

$$۶<۷>۸ \qquad\qquad -۳<-۵<-۱۰$$

۴ ــ هر دسته از اعداد زیر را با دو علامت $>$ و $<$ از هم جدا کنید به قسمی که نامساویهای حاصل درست باشند :

$$(-۴\,,\,-۲\,,\,۰) \qquad\qquad (-۷\,,\,۲,\,-۳)$$

$$(۸\,,\,۵\,,\,۰) \qquad\qquad (-۵\,,\,-۳\,,\,-۲)$$

$(۴ , ۵ , -۳)$ $(-۸ , ۰ , ۶)$

۵ ـ به فرض آن که حروفی که در زیر به کار می‌روند نمایندهٔ عددهای حقیقی مخالف با صفر باشند به جای علامت * یکی از علامتهای $<$ یا $>$ یـا $=$ را کـه مناسب می دانید قرار دهید :

الف $(+۵)(-۳) * (-۴)(-۳)$

ب $x > ۰ \Longrightarrow ۵x * -۳x$

ج $b > a \Longrightarrow (a-b) * (b-a)$

د $a > b \Longrightarrow a+c * b+c$

ه $y > ۰ \Longrightarrow -۷y * -۵y$

و $a > ۰ \Longrightarrow ۴a * -۴a$

ز $b > ۰ \Longrightarrow ۵b * ۰$

دلیل درستی یا نادرستی هر یك از گزاره‌های زیر را با اشاره بـه مطالبی که در این فصل دیده‌اید بیان کنید :

۶ $۵ < ۷ \Longrightarrow -۵ > -۷$

۷ $۸ > ۴ \Longrightarrow -۸ < -۴$

۸ $۵ > ۰ \Longrightarrow -۵ < ۰$

۹ $۵ > ۳ \Longrightarrow ۱۰ > ۶$

۱۰ $۵ > ۳ \Longrightarrow -۱۰ < -۶$

۱۱ $۲ < ۵ \Longrightarrow -۶ > -۱۵$

۱۲ $۳ > ۲ , ۵ > ۳ \Longrightarrow ۸ > ۵$

۱۳ $۲ < ۷ , ۶ < ۷ \Longrightarrow ۸ < ۱۴$

۱۴ $۳ < ۴ , ۵ < ۶ \Longrightarrow ۱۵ < ۲۴$

۱۵ $۷ > ۳ , ۹ > ۲ \Longrightarrow ۶۳ > ۶$

۱۶ـ ثابت کنید کـه اگر a و b متحدالعلامه بـاشند $ab > ۰$ و اگـر مختلف العلامه باشند $ab < ۰$

۱۷ ـ ثابت کنید که اگـر $ab > ۰$ معلوم می‌شود کـه a و b متحدالعلامه‌انـد و از $ab < ۰$ معلوم می‌شود که a و b مختلف‌العلامه‌اند .

۱۸ ـ ثابت کنید که $a \neq ۰$ و $\frac{۱}{a}$ متحدالعلامه‌اند .

۱۹ـ ثابت کنید که هرگاه a و b مخالف صفر و متحدالعلامه باشند آنگاه از نامساوی $a < b$ نتیجه می‌شود $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

نامعادلات درجهٔ اول یک‌مجهولی

۴ـ نامعادله ـ اگر در یک نامساوی یک مجهول وجود داشته باشد و آن نامساوی به ازای بعضی از مقادیر عددی که به مجهول نسبت داده شود درست باشد و به ازای بعضی دیگر درست نباشد آن نامساوی را نامساوی شرطی یک‌مجهولی یا نامعادلهٔ یک‌مجهولی می‌نامند.

در واقع نامعادله گزارهٔ نمایی است دربارهٔ نامساوی بودن دو عبارت که به ازای بعضی از مقادیر مجهول به گزارهٔ درست تبدیل می‌شود .

مثال : نامساوی $4x - 5 > 7$ یک نامعادلهٔ یک‌مجهولی است و مثلاً اعداد $x = 4$ و $x = 5$ و $x = 6$ در این نامعادله صادق هستند و جزو جوابهای آن می‌باشند .

ولی مثلاً اعداد $x = 2$ و $x = 1$ و $x = 0$ در این نامعادله صدق نمی‌کنند .

۵ ـ مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ یک‌مجهولی ـ مقادیری از حرف مجهول را که به ازای آنها نامعادله به یک نامساوی درست تبدیل می‌گردد مجموعهٔ جواب نامعادله می‌نامند .

در این کتاب حوزهٔ تغییرات مجهول نامعادلات عموماً مجموعهٔ R است .

۶ ـ حل کردن نامعادله ـ مقصود از حل کردن نامعادله به دست آوردن مجموعهٔ جواب آن است . برای حل کردن نامعادله باید آن را به نامعادلهٔ دیگری تبدیل کرد که از آن سادهتر ولی با آن هم‌ارز باشد .

دو نامعادله را در صورتی هم‌ارز می‌نامند کـه مجموعهٔ جوابهای آنها یکی باشد ، یعنی هر جواب از هریک از آنها جواب دیگری نیز باشد .

برای تبدیل کردن یک نامعادله به نامعادلهٔ ساده‌ترکـه با آن هم‌ارز باشد از خاصیتها و نتایج مربوط که قبلا دربارهٔ نامساویها گفته‌ایم استفاده می‌شود .

۷ ـ می‌توان به دوطرف هرنامعادله یک‌عبارت را افزود ویا از دوطرف هرنامعادله یک عبارت را کم کرد.

(این همان خاصیت O_4 ونتیجهٔ آن‌است که قبلاً بیان شده است.)

مثال : اگر به دو طرف نامعادلهٔ

$$5x+12>21-3x$$

عبارت $3x$ را بیفزاییم نامعادله به صورت زیر در می‌آید که ساده‌تر از نامعادلهٔ فوق است :

$$5x+3x+12>21$$

و یا :

$$8x+12>21$$

و اگر از دوطرف نامعادلهٔ اخیر عدد ۱۲ را کم کنیم نامعادله بازهم ساده شده به صورت زیر در می‌آید :

$$8x>9$$

۸ – نتیجه ـ در هر نامعادله می‌توان جمله‌های مشترك را از دو طرف حذف کرد، و یك جمله را از یك طرف نامعادله با تغییردادن علامت به طرف دیگر نقل کرد .

مثال ۱ : اگر در نامعادلهٔ : $5x+3x^2+1<4x+3x^2$ جملهٔ مشترك $3x^2$ را از دو طرف حذف کنیم نامعادله ساده شده به صورت زیر در می‌آید :

$$5x+1<4x$$

و این در حکم آن است که جملهٔ $3x^2$ را از دو طرف نامعادله کم‌کرده باشیم .

مثال ۲ : در نامعادلهٔ : $5x-7<-3x$

می‌توانیم جملهٔ $-3x$ را تغییرعلامت داده‌آن را ازطرف راست به طرف چپ نامعادله ببریم :

$$5x+3x-7<0$$

و یا :

$$8x-7<0$$

و این در حکم آن است که جملهٔ $3x$ را به دو طرف نامعادله افزوده باشیم .

۹ـ اولا می‌توانیم بدون تغییر دادن جهت نامعادله دوطرف آن را در یك عدد مثبت ضرب یابریك عدد مثبت‌تقسیم کنیم.

(این همان خاصیت O_4 است که قبلاً دیده‌اید .)

ثانیاً می‌توانیم دو طرف هر نامعادله را در یك عـدد منفی ضرب و یا بریـك عدد منفی تقسیم کنیم به شرط آن‌که جهت نامعادله را تغییر دهیم .

مثال ۱ : اگر دو طرف نامعادلهٔ :

$$\frac{2x+5}{4}-\frac{x-3}{6}<\frac{x+1}{3}$$

را در عدد ۱۲ (یعنی کوچکترین مضرب مشترك مخرجها) ضرب کنیم مخرجها از بین می‌روند و نامعادله ساده می‌شود :

$$۳(۲x+۵)-۲(x-۳)<۴(x+۱)$$

مثال ۲ : اگر دو طرف نامعادلهٔ :

$$\frac{۳x+۱}{-۲}>x+۷$$

را در ۲− ضرب کنیم مخرج از بین می‌رود . ولی باید جهت نامعادله را عوض کنیم :

$$۳x+۱<-۲(x+۷)$$

۱۰ـ حل نامعادلهٔ عددی درجهٔ اول ـ روش حل کردن این نامعادلات مانند حل‌کردن معادلات عددی درجهٔ اول است . فقط باید متوجه باشیم‌که اگر دو طرف نامعادله را در عددی منفی ضرب و یا برعددی منفی تقسیم کنیم باید جهت نامعادله را تغییر دهیم .

مثال ۱ : حل نامعادلهٔ :

$$۵(۲x-۳)-۴(۵x-۷)>۱۹-۲(x+۱۱)$$

دو طرف را ساده می‌کنیم :

$$۱۰x-۱۵-۲۰x+۲۸>۱۹-۲x-۲۲$$

و یا :

$$-۱۰x+۱۳>-۳-۲x$$

جمله‌هایی را که شامل مجهول است به یك طرف و مقادیر معلوم را به طرف دیگر نقل می‌کنیم :

$$-۱۰x+۲x>-۳-۱۳$$

و یا :

$$-۸x>-۱۶$$

اکنون دو طرف نامعادله را به ضریب x یعنی ۸− تقسیم کرده جهت نامعادله را تغییر می‌دهیم (چرا؟) حاصل می‌شود :

$$x<\frac{۱۶}{۸} \quad \text{یعنی} \quad x<۲$$

بنابراین مجموعهٔ جواب این نامعادله عبارت‌است از :

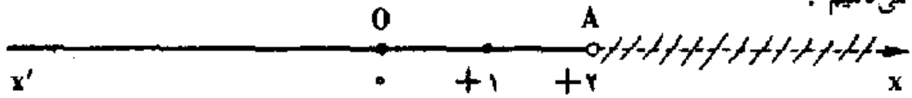
$$\left\{ x\in R \mid x<۲ \right\}$$

یعنی هرعدد حقیقی‌که کوچکتر از ۲ باشد جواب نامعادله است .

ملاحظه می‌شود که در حالی‌که معادلهٔ یك‌مجهولی درجهٔ اول فقط یك جواب می‌تواند داشته باشد، نامعادلهٔ یك مجهولی درجهٔ اول دارای بی‌نهایت جواب است .

تعبیر هندسی حل نامعادلهٔ فوق ـ روی محور اعداد نقطهٔ بـه طول x=۲ را A

می‌نامیم .



نقطه‌هایی که طول آنها در نامعادلهٔ مثال ۱ صدق می‌کند نقاطی هستند که روی محور درسمت چپ نقطهٔ A قرار دارند. نقطه A را توخالـی قسمت راست آن را روی محور هاشور می‌زنیم تا معلوم باشد که نقطه A و نقطه‌هایـی که درسمت راست آن واقـع هستند طولشان در نامعادله صدق نمی‌کند.

مثال ۲ : حل نامعادلهٔ : $\frac{۴x+۱}{۴}-\frac{۵x+۲}{۶}<\frac{x+۱}{۳}$

دو طرف نامعادله را در ۱۲ ضرب می‌کنیم (چرا؟) :

$$۳(۴x+۱)-۲(۵x+۲)<۴(x+۱)$$

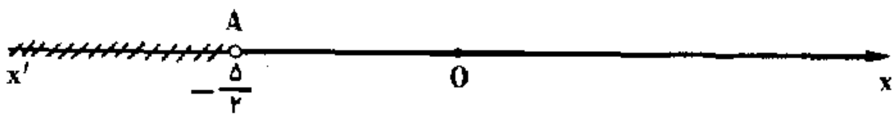
و یا : $$۱۲x+۳-۱۰x-۴<۴x+۴$$

و یا : $$۱۲x-۱۰x-۴x<۴-۳+۴$$

و یا : $$-۲x<۵$$

دو طرف را به ضریب x یعنی ۲− تقسیم وجهت نامعادله را تغییر می‌دهیم (چرا؟) حاصل می‌شود : $$x>-\frac{۵}{۲}$$

تعبیرهندسی ـ نمودار زیر را مطابق با روشی که در مثال (۱) گفته شد رسم می‌کنیم:



نقطه‌هایی کـه روی محور در سمت راست نقطهٔ A واقع هستند طولشان در نـامعادلـهٔ مفروض صدق می‌کند .

۱۱ ـ حل نامعادلهٔ درجهٔ اول یک‌مجهولی در حالت کلی ـ هر نامعادلـهٔ درجهٔ اول یک مجهولی بعداز خلاصه کردن جمله‌ها وبردن معلومات به یک طرف ومجهولات به طرف دیگر به یکی از دو صورت زیر در می‌آید :

$$ax<b \qquad \text{یا} \qquad ax>b$$

اگر دو طرف صورت دوم را در ۱− ضرب کنیم آن نیز به حالت اول برمی‌گردد . بنابراین کافی است تنها حالت $ax>b$ را مورد بحث قرار دهیم .

برحسب مقادیر ضریب a سه حالت ممکن است رخ دهد :

اولا $a>۰$

در این حالت خواهیم داشت : $x>\frac{b}{a}$ (جهت تغییر نکرده است)

ثانیاً $a<0$

در این حالت داریم : $x<\frac{b}{a}$ (جهت تغییر کرده است)

ثالثاً $a=0$

در این صورت نامعادله به صورت $b<0$ در می‌آید . این‌نامساوی عددی اگر b منفی باشد همیشه درست است و اگر b مثبت یا صفرباشد هرگز درست نیست.

۱۲- نامعادلات مضاعف ـ نامعادلات توأم عبارت است از دو یا چند نامعادله‌که باید در عین حال به ازای مقادیر مشترکی از مجهول برقرار باشند .

برای حل نامعادلات توأم کافی است هریك را جداگانه حل کنیم وجوابهای مشترك را بین همگی آنها به دست آوریم .

مجموعهٔ جواب دویا چند نامعادلهٔ توأم عبارت است از اشتراك مجموعه‌های جواب هریك از آنها .

مثال : حل دستگاه دو نامعادلهٔ توأم :

$$\begin{cases} ۵x-۷<۳x & (۱) \\ ۲x+۵>۱ & (۲) \end{cases}$$

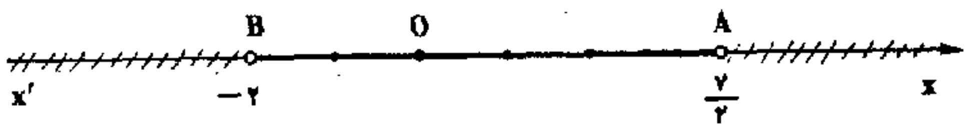
مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ (۱) عبارت‌است از $\left\{ x\in R \mid x<\frac{۷}{۲} \right\}$

ومجموعهٔ جواب نامعادلهٔ (۲) عبارت‌است از $\left\{ x\in R \mid x>-۲ \right\}$

ومجموعهٔ جواب دستگاه مفروض اشتراك دومجموعهٔ فوق یعنی:

$$-۲<x<\frac{۷}{۲}$$

است . نمودار ترسیمی این جوابها مطلب را بهتر روشن می‌کند :



روی یك محورقسمتهایی را که xهای آنها در هریك ازدونامعادله صدق نمی‌کند هاشور می‌زنیم. اگرفاصله‌ای هاشور نخورده باقی‌بماند طولهای نقاط‌آن جوابهای مشترك دونامعادله هستند. درشکل فوق نقطه A ونقاط واقع درسمت راست آن تنها نقاطی هستند که درنامعادلهٔ (۱) صدق نمی‌کنند. نقطه B ونقاطی که درسمت چپ‌آن هستند نیز تنها نقاطی هستند که درنامعادله(۲) صدق نمی‌کنند.

پس نقاطی که روی محور بین نقاط A و B واقع هستند طولهاشان جوابهای دستگاه مفروض می‌باشند .

تمرین

نامعادلات زیر را حل کنید :

۱ $\frac{x}{30}+\frac{1}{6}-\frac{x}{5}>\frac{2x}{45}+16$

۲ $\frac{15x}{2}-\frac{1}{2}-\frac{7x}{24}>\frac{x}{6}-1$

۳ $\frac{3x}{7}-\frac{x}{3}+\frac{19}{5}<\frac{2x}{15}-3$

۴ $\frac{5x}{2}-\frac{18}{5}-\frac{3x}{4}<\frac{8x}{5}+\frac{9}{4}$

۵ $\frac{5x}{6}+\frac{1}{4}-\frac{7x}{12}>\frac{x}{3}+\frac{3}{6}$

۶ $\frac{3x}{7}+\frac{5x}{6}+\frac{1}{4}<\frac{x}{3}+\frac{3}{16}$

۷ $\frac{x-5}{4}-\frac{x+8}{3}<\frac{x+11}{6}$

۸ $\frac{x+7}{10}-\frac{x-5}{5}>\frac{x-9}{3}$

۹ $\frac{8x+5}{9}-\frac{2x+23}{6}<\frac{x+4}{4}-\frac{x}{12}$

۱۰ $\frac{7x-3}{8}+\frac{x+31}{4}>\frac{2x+7}{3}$

نامعادلات توأم زیر را حل کنید :

۱۱ $\begin{cases} 2x+5>5x-4 \\ x-7<2x-3 \end{cases}$

۱۲ $\begin{cases} 9x-15>4x+13 \\ 19-5x<7+3x \end{cases}$

۱۳ $\begin{cases} \frac{x+5}{6}+\frac{x+9}{8}>\frac{2x+7}{9} \\ \frac{x+5}{4}-\frac{x-3}{\text{[illegible]}}>\frac{x}{3} \end{cases}$

۱۴ $\begin{cases} \frac{x-1}{3}+\frac{4(2x-3)}{9}<\frac{5x+1}{8} \\ \frac{5x+9}{3}+\frac{7x+5}{9}>\frac{3x+21}{4} \end{cases}$

۱۵ $\begin{cases} \frac{5x+7}{4}+\frac{3x+5}{8}>\frac{9x+4}{5} \\ \frac{3x-2}{18}+\frac{2x-9}{45}>\frac{3+x}{10} \end{cases}$

۱۶ $\begin{cases} \frac{13x-16}{15}+\frac{x-32}{35}<\frac{x-6}{21} \\ \frac{5x+12}{14}+\frac{11x+28}{2}>\frac{4x+9}{77} \end{cases}$